Martin Gardner

Mathematisches Labyrinth

Neue Probleme für die Knobelgemeinde

Mit 180 Bildern

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Gardner, Martin:
[Sammlung (dt.)]
Mathematisches Labyrinth: neue Probleme für d. Knobelgemeinde/Martin Gardner. [Übers.: Brigitte Kunisch; Rudolf Heersink]. – Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1979.
Einheitssacht.: Martin Gardner's sixth book of mathematical games from Scientific American (dt.)
ISBN-13:978-3-528-08402-8 e-ISBN-13:978-3-322-83962-6
DOI: 10.1007/978-3-322-83962-6

Titel der Originalausgabe:

Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American

erschienen im Verlag:

W. H. Freeman and Company, San Francisco

Übersetzung: *Brigitte Kunisch*, Graz
Rudolf Heersink, Graz

Verlagsredaktion: *Alfred Schubert*

Alle Rechte vorbehalten
© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1979

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für die Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

Satz: Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Umschlaggestaltung: Peter Neitzke, Köln, unter Verwendung eines Motivs von René Magritte ('La lunette d'approche, 1963)

ISBN-13:978-3-528-08402-8

Vorwort

Noch vor wenigen Jahrzehnten wäre der Verfasser eines Mathematikbuches von seinen Kollegen als frivol bezeichnet worden, hätte er Rätsel und andere unterhaltsame Dinge in sein Buch aufgenommen. Heute ist das nicht mehr so. In Donald E. Knuths umfangreichem Werk "The Art of Computer Programming" (New York: Addison Wesley, 1968, 1969), an dem er noch weiter arbeitet, findet sich in den Übungen viel unterhaltsames Material. Es gibt sogar Lehrbücher, in denen dies der wichtigste Aspekt ist. Ein erfreuliches Beispiel dafür ist Harold R. Jacobs "Mathematics: A Human Endeavor", mit dem Untertitel, "A Textbook for Those Who Think They Don't Like the Subject" (San Francisco: W. H. Freemann and Co., 1970). Richard Bellman, Kenneth L. Cooke und Jo Ann Lockett, die Autoren des Buches "Algorithms, Graphs, and Computers" (New York: Academic Press, 1970), schreiben in ihrem Vorwort: „Das wichtigste Medium, das wir zum Erreichen unseres Zieles gewählt haben, ist das mathematische Rätsel".

Dieser Trend ist nicht schwer zu verstehen. Er ist Teil jenes mühseligen, langsamen Prozesses, bei dem die Lehrer erkennen, daß jene Studenten am besten lernen, die am besten motiviert sind. Mathematik war nie ein langweiliger Gegenstand, obwohl er nur allzuoft auf die langweiligste Art und Weise unterrichtet worden ist. Es gibt keine bessere Möglichkeit, die Langeweile zu durchbrechen, als unterhaltsame Themen in die Lehrveranstaltung hineinzubringen, Themen, die Elemente des Spieles, des Humors, der Schönheit und der Überraschung an sich haben. Die größten Mathematiker betrachteten ihren Gegenstand immer als eine Quelle intensiven intellektuellen Vergnügens und zögerten nur selten, auch Probleme spielerischer Natur zu verfolgen. Auch bei einem schnellen Durchblättern von W. W. Rouse Balls klassischem britischen Werk "Mathematical Recreations and Essays" (das erstmals von Macmillan im Jahre 1892 verlegt wurde und dessen zwölfte, verbesserte Auflage bald erscheinen wird), findet man die Namen berühmter Mathematiker auf fast jeder Seite.

Euklid, einer der ersten großen Mathematiker, schrieb ein Buch (das unglücklicherweise nicht erhalten ist) über geometrische Trugschlüsse. Dieses Thema wird in fast allen Büchern, die sich mit unterhaltsamer Mathematik beschäftigen, behandelt, in den meisten Lehrbüchern über Geometrie jedoch erstaunlicherweise vermieden. Die Geometrielehrer werden hoffentlich bald entdecken, daß dies eine hervorragende Möglichkeit ist, ihre Schüler für die Notwendigkeit der streng logischen Beweisführung zu gewinnen. Dazu könnten sie etwa folgendes an der Tafel „beweisen": Ein rechter Winkel ist gleich einem stumpfen Winkel, und darauf die Klasse herausfordern, die Stelle zu finden, an der ein Fehlschluß gemacht wurde.

Die unterhaltsame Mathematik läßt sich jedoch nicht nur zu pädagogischen Zwecken verwerten. In der Geschichte gibt es unzählige Beispiele für Rätsel, die man zuerst für völlig trivial hielt, deren Lösung aber oft zu bedeutenden neuen Sätzen mit wertvollen Anwendungsmöglichkeiten führte. Ich will nur einen der neueren Fälle hier anführen. Edward F. Moore schreibt in der wichtigen Arbeit, "The Shortest Path Through a Maze":

„Der Ursprung der hier angewandten Methode bietet eine interessante Illustration für den Wert, den die grundlegende Erforschung von Rätseln und Spielen besitzt. Obwohl diese Forschung oft als frivol abgetan worden ist, erscheint es glaubwürdig, daß diese Algorithmen schließlich dazu führen könnten, große Geldsummen einzusparen, weil sie einen rationelleren Einsatz überbeanspruchter Transport- oder Kommunikationssysteme ermöglichen". (Neu aufgelegt in "Annals of the Computation Laboratory of Harvard University", Bd. 30, 1959, S. 285-292.) Muß ich jetzt den Leser noch darauf aufmerksam machen, daß das Labyrinth ein topologisches Rätsel und älter als die euklidische Geometrie ist, und daß die Topologie selbst ihren Anfang in Leonhard Eulers berühmter Analyse jenes Rätsels fand, in dem ein bestimmter Weg über die sieben Brücken von Königsberg gefunden werden soll?

Dieses Buch ist die sechste Anthologie meiner Beiträge für die Abteilung Mathematische Spiele bei "Scientific American". Wie auch in den früheren Sammlungen habe ich die einzelnen Beiträge erweitert, verbessert und weitere bibliographische Angaben hinzugefügt. Für das Privileg, regelmäßig Beiträge liefern zu dürfen, bin ich der Zeitschrift zu Dank verpflichtet, ebenso meiner Frau für ihre unermüdliche Hilfe beim Korrekturlesen und wie immer auch allen Lesern von "Scientific American", die durch ihre Ideen und Vorschläge erheblich dazu beigetragen haben, den ursprünglichen Wert der Artikel zu vergrößern.

Februar 1971 *Martin Gardner*

Inhaltsverzeichnis

1. Die Helix oder Schraubenlinie 1
2. Kleinsche Flaschen und andere Flächen 8
3. Kombinatorik 18
4. Springende Bälle in Vielecken und Polyedern 28
5. Vier ungewöhnliche Brettspiele 38
6. Das starre Quadrat und acht andere Probleme 48
   1. Das starre Quadrat 48
   2. Eine Wette 49
   3. Ein dreidimensionales Labyrinth 49
   4. Goldene Kettenglieder 50
   5. Magische Wortquadrate 51
   6. Die drei Zeiger der Uhr 52
   7. Drei Kryptorithmen 52
   8. Maximale Zugmöglichkeiten für Schachfiguren 54
   9. Das Falten eines Möbiusbandes 54
7. Puzzles mit verschiebbaren Klötzen 65
8. Paritätskontrollen 72
9. Die Regelmäßigkeit der Primzahlen 80
10. Graphentheorie 92
11. Das Ternärsystem 104
12. Die Reise um den Mond und sieben andere Probleme 113
    1. Die Reise um den Mond 113
    2. Das Rechteck und die Ölquelle 114
    3. Ein neues Ticktacktoe 114
    4. Die Münzen eines Reiches 115
    5. Banknoten und zwei Hüte 115
    6. Dudeneys Wortquadrat 115
    7. Ordnen nach Gewicht 116
    8. Schachtouren für Damen 116
13. Die Zykloide: Helena der Geometrie 127
14. Mathematische Zaubertricks 134
15. Der Pythagoreische Lehrsatz 143

16. Grenzwerte von unendlichen Reihen 154
17. Polyiamonds 164
18. Tetraeder 174
19. Coleridges Äpfel und sieben weitere Probleme 186
1. Coleridges Äpfel 186
2. Die nach außen gewendete Hose 186
3. Ein Münzenspiel 186
4. Wer lügt und wer sagt die Wahrheit? 188
5. Das Zahnrad-Paradoxon 188
6. Ein Spiel mit Grashalmen 189
7. Casey als Schlagmann 190
8. Ein Puzzle mit acht Klötzen 190
20. Das Gitter der ganzen Zahlen 197
21. Endlose Folgen 209
22. O'Gara, der mathematische Briefträger 219
23. Op Art 228
24. Außerirdische Kommunikation 241

Literatur 251

1 Die Helix oder Schraubenlinie

Das augenblickliche Einverständnis von Rosy mit unserem Modell verwunderte mich vorerst. Ich hatte gefürchtet, ihr scharfer, hartnäckiger, in der von ihr selbst gezimmerten antihelischen Falle gefangener Geist würde irrelevante Ergebnisse ausgraben, die Unsicherheit bezüglich der Richtigkeit der Doppelhelix hervorrufen könnten. Nichtsdestoweniger sah sie, wie beinahe alle anderen auch, den Liebreiz der Basispaare und akzeptierte die Tatsache, daß die Struktur zu schön sei, um nicht wahr zu sein.

James d. Watson, The Double Helix

Ein gerades Schwert paßt in eine gerade Scheide. Dasselbe gilt für ein Schwert, das sich kreisbogenförmig krümmt: Es kann anstandslos in eine Scheide derselben Krümmung gestreckt werden. Mathematiker beschreiben diese Eigenschaft von Geraden und Kreisen manchmal, indem sie sie „selbstkongruente" Kurven nennen; jedes Segment einer solchen Kurve kann entlang der Kurve verschoben werden, von einem Ende bis zum anderen, und es wird immer „passen".

Ist es möglich, ein Schwert mit einer Scheide zu konstruieren, das weder gerade *noch* kreisbögenförmig ist? Die meisten werden nach sorgfältiger Betrachtung antworten: nein; aber sie haben unrecht. Es gibt eine dritte selbstkongruente Kurve; die kreisförmige Helix (Schraubenlinie). Das ist eine Kurve, die sich so um einen Kreiszylinder windet, daß sie alle „Erzeugenden" des Zylinders im gleichen Winkel schneidet. Bild 1 macht dies klar. Die Erzeugenden sind die senkrechten Geraden parallel zur Zylinderachse;

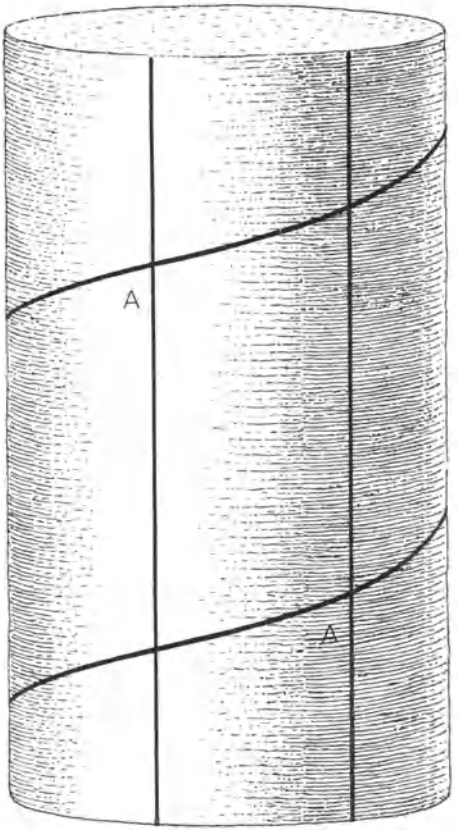


Bild 1 Kreisförmige Helix auf einem Zylinder

A ist der gleichbleibende Winkel in dem die Helix jede Erzeugende kreuzt. Wegen der konstanten Krümmung der Helix würde sich ein helisches Schwert mühelos in seine helische Scheide hinein und aus dieser heraus winden.

In der Tat können der Kreis und die Gerade als Grenzfälle der kreisförmigen Helix betrachtet werden. Drückt man die Kurve zusammen, bis die Windungen nahe beieinander zu liegen kommen, erhält man eine sehr eng gewundene Helix; wächst der Winkel A weiter auf 90 Grad an, so fällt die Helix zu einem Kreis zusammen. Streckt man sie andererseits bis der Winkel A Null wird, dann verwandelt sie sich in eine Gerade. Richtet man parallele Lichtstrahlen senkrecht gegen eine Wand, so wirft eine kreisförmige Helix, die sich mit ihrer Achse parallel zu den Lichtstrahlen von der Wand befindet, als Schatten einen einzigen Kreis. Steht die Achse senkrecht auf den Lichtstrahlen, ist der Schatten eine Sinuskurve. Andere Projektionsarten liefern die Zykloide und andere bekannte Kurven.

Jede kreisförmige oder anders gebogene Helix ist eine asymmetrische Raumkurve, die von ihrem Spiegelbild verschieden ist. Wir werden den Ausdruck „rechtsdrehend" für eine Helix verwenden, die sich nach Art einer gewöhnlichen Holzschraube oder eines Korkenziehers im Uhrzeigersinn „vom Betrachter fort" windet. Hält man einen solchen Korkenzieher vor einen Spiegel, sieht man, daß sein reflektiertes Bild, mit den Worten von Lewis Carrolls Alice, „anders herum geht". Das Spiegelbild ist ein linksdrehender Korkenzieher. Solche Korkenzieher bekommt man tatsächlich als einen brauchbaren Scherzartikel zu kaufen. So ungewohnt sind uns linksdrehende Schrauben, daß das Opfer unter Umständen einige Minuten mit einem derartigen Korkenzieher herumkämpft, bis es merkt, daß er im Gegenuhrzeigersinn zu drehen ist.

Neben Schrauben, Bolzen und Muttern, die (außer für besondere Zwecke) gewöhnlich rechtsdrehend gebaut sind, gibt es die meisten vom Menschen hergestellten schraubenförmigen Gegenstände in beiden, rechtsdrehenden und linksdrehenden, Formen: Zuckerstangerln, Wendeltreppen, Schnüre, Seile aus gedrehten Strängen, und so fort. Dieselbe Vielfalt im Drehsinn findet man bei konischen Schraubenlinien (Kurven, die sich an Kegeln aufwickeln); hierher gehören Bettfedern und spiralförmige Rampen wie die umgekehrte konische Rampe in Frank Lloyd Wrights Guggenheim Museum in New York City.

Anders ist der Natur! Helische Strukturen gibt es im Überfluß in lebenden Organismen, vom einfachsten Virus bis zu Teilen des menschlichen Körpers. In nahezu jedem Fall trägt der genetische Code Informationen, die jeder Helix genau sagen, in welche Richtung sie sich zu winden hat. Der genetische Code selbst wird, wie heute jeder weiß, von einem zweistrangigen helischen DNA-Molekül getragen, dessen zwei Stränge sich umeinander schlingen, wie die beiden Schlangen am Stab des Hermes. Darüber hinaus zeigt es sich seit Linus Paulings Pionierarbeit über die helische Struktur von Proteinmolekülen mehr und mehr, daß jedes in der Natur vorkommende Riesen-Proteinmolekül eine rechtsdrehende Helix als „Rückgrat" besitzt. Sowohl in der Nukleinsäure als auch im Protein ist das Rückgrat eine Kette von Gliedern asymetrischer Struktur von demselben Drehsinn. Jedes Glied erteilt der Kette, sozusagen, eine weitere Drehung in derselben Richtung, wie die Stufen einer Wendeltreppe.

Größere helische Strukturen in Tieren haben zweiseitige symmetrische Gestalt und kommen für gewöhnlich in spiegelbildlichen Paaren vor, eine auf jeder Seite des Körpers. Die Hörner von Widdern, Ziegen, Antilopen und anderen Säugetieren sind auffallende Beispiele (Bild 2). Die Muschel des menschlichen Ohrs ist eine konische Helix, die linksdrehend im linken und rechtsdrehend im rechten Ohr ist. Eine sonderbare Ausnahme ist der Zahn des Narwals, eines kleinen Wals, der in arktischen Gewässern gedeiht. Diese sonderbare Kreatur wird mit zwei Zähnen im Oberkiefer geboren. Beide Zähne bleiben für immer im Kiefer des weiblichen Narwals „begraben" und ebenso der rechte Zahn des männlichen. Des Männchens linker Zahn jedoch wächst gerade nach vorne, wie ein Speer, bis zu der lächerlichen Länge von 2,5 bis 2,8 m – mehr als die halbe Länge des Tieres von dessen Maul bis zum Schwanz! Rund um diesen Zahn winden sich im Gegenuhrzeigersinn schraubenförmige Rillen nach vorne (Bild 3). In den seltenen Fällen, wo beide Zähne zu Stoßzähnen auswachsen, würde man den rechten Zahn im Uhrzeigersinn gedreht erwarten. Aber nein, auch er ist immer linksdrehend. Die Zoologen sind sich nicht einig, wie dies zustandekommt. Sir D'Arcy Thompson verteidigt in seinem Buch "On Growth and Form" seine eigene These, derzufolge der Wal mit einer leicht rechtsgerichteten Schraubenbewegung schwimmt. Die Trägheit seines riesigen Stoßzahnes würde dabei ein Drehmoment an der Basis des Zahnes erzeugen, das die Rotation im Gegenuhrzeigersinn während des Wachstums verursachen könnte. (Siehe "The Horn of the Unicorn" von John Tyler Bonner; "Scientific American", March, 1951).

Bild 2 Die helixförmigen Hörner des Pamirschafes haben entgegengesetzten Drehsinn.

Bild 3 Die schraubenförmigen Rillen des Narwals sind immer linksdrehend.

Wann immer eine einzige Helix in der Struktur einer Pflanze oder eines Tieres hervortritt, beschränkt sich gewöhnlich die ganze Art auf eine Helix von bestimmter Orientierung. Das gilt für unzählige Formen helischer Bakterien ebenso wie für die Samenzellen aller höheren Tiere. Die Nabelschnur ist beim Menschen eine dreifache Helix aus einer Vene und zwei Arterien, die sich unveränderlich linksherum winden. Die auffälligsten Beispiele liefern die konischen Schraubenlinien der Schalen von Schnecken und anderen Weichtieren. Nicht alle helischen Schalen haben einen Drehsinn. Der gegliederte Nautilus z. B. spult sich in einer Ebene auf; wie ein Spiralnebel kann er in zwei identische Hälften, eine rechte und eine linke, geteilt werden. Aber es gibt tausende schöner Weichtierschalen, die entweder rechts oder links gewunden sind (Bild 4). Manche Arten sind immer rechts- manche immer linksdrehend. Manche winden sich an einem Ort in die eine Richtung, an einem anderen Ort in die andere Richtung. Gelegentliche „Ausreißer", die sich in die falsche Richtung aufwickeln, werden von Sammlern besonders geschätzt.

Eine verwirrende Art eines spiralförmigen Fossils, bekannt als des Teufels Korkenzieher *(Daemonelix)*, findet man in Nebraska und Wyoming. Diese riesigen Spiralen, 2 m lang oder mehr, sind mal rechtsdrehend, mal linksdrehend. Geologen diskutierten jahrelang darüber, ob sie Fossilien ausgestorbener Pflanzen seien oder Erdhöhlen von Vorfahren des Bibers. Schließlich gewann die Biber-Theorie die Oberhand, nachdem man die Reste kleiner prähistorischer Biber im Inneren einiger dieser Korkenzieher gefunden hatte.

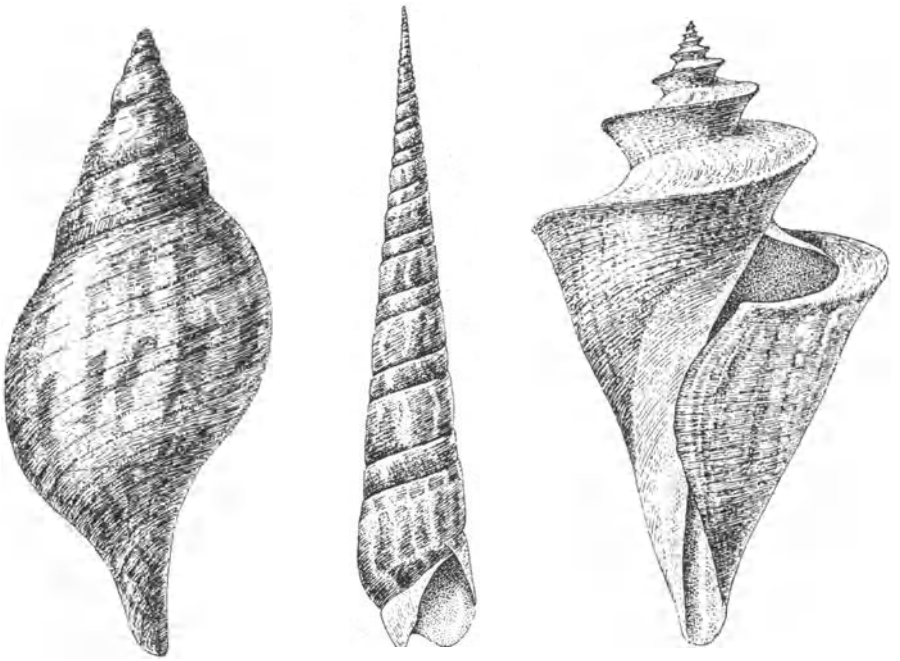


Bild 4 Drei Weichtierschalen, mit kegelförmiger Rechtsspirale

In der Pflanzenwelt sind Schraubenlinien in der Struktur von Halmen, Stengeln, Ranken, Samen, Blüten, Zapfen, Blättern – sogar in der spiraligen Anordnung von Blättern und Zweigen rund um einen Stamm verbreitet. Die Anzahl der Umdrehungen entlang eines schraubenförmigen Weges von einem Blatt zu dem direkt darüber liegenden neigt dazu, eine der bekannten Fibonacci-Zahlen zu sein: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (Jede Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden.) Die umfassende Literatur des Gebietes der „Phyllotaxie" (Blattanordnung) behandelt das überraschende Auftreten der Fibonacci-Zahlen bei botanischen Phänomen dieser Art.

Die helischen Ranken von Kletterpflanzen sind gewöhnlich rechtsdrehend, aber tausende Arten von Schlingpflanzen winden sich anders herum. Das Geißblatt z. B. ist immer linksdrehend; die Windengewächse (eine Familie, die den Himmeltau einschließt) sind immer rechtsdrehend. Falls diese beiden Pflanzen sich ineinander verstricken, ist das Resultat eine leidenschaftliche, heftige Umarmung, die lange Zeit hindurch die englischen Dichter faszinierte. "The blue bindweed (Winde)" schrieb Ben Jonson 1617, doth itself enfold with honeysuckle (Geißblatt)". Und Shakespeare läßt Königin Titania im Mittsommernachtstraum von ihrer Absicht, Bottom the Weaver (der in einen Esel verwandelt wurde) zu umarmen, sagen: "Sleep thou, and I will wind thee in my arms./... So doth the woodbine the sweet honysuckle/Gently entwist." Zu Shakespeares Zeiten war "woodbine" ein gebräuchlicher Ausdruck für "bindweed". Da er später ausschließlich für "honeysuckle" verwendet wurde, führten viele Kommentatoren diese Stelle durch die Annahme ad absurdum, Titania habe von mit Geißblatt verstricktem Geißblatt gesprochen. Das Wissen um den entgegengesetzen Drehsinn von Geißblatt und Winde steigert natürlich die Bedeutung von Titanias Metapher.

Erst vor kurzem hat der Britische Dichter und Unterhalter Michael Flanders ein reizendes Lied, genannt "Misalliance", geschrieben, das die Liebe des Geißblattes zur Winde preist; vertont wurde es von Flanders Freund Donald Swann. Mit seiner freundlichen Erlaubnis wurde der gesamte Text auf der gegenüberliegenden Seite abgedruckt. (Leser, die die Melodie lernen möchten, können sie von Flanders und Swann auf der Angel-Platte von *At the Drop of a Hat*, ihrer ausgelassenen Zwei-Mann-Revue, die in London und New York so eingeschlagen hat, gesungen hören. Man beachte, daß Flanders Geißblatt rechtsgewunden ist, seine Winde linksgewunden. Es ist eine Sache der Konvention, ob eine Helix rechts- oder linksgewunden genannt wird. Betrachtet man die Spitze einer rechtsgewundenen Holzschraube, so sieht man, wie sich die Helix im Gegenuhrzeigersinn zum Betrachter hin windet, so daß sie genau so wohlberechtigt linksdrehend genannt werden könnte. Flanders hält sich einfach an die zu der hiesigen gegenteilige Konvention.

Die Verstrickung zweier kreisförmiger Schraubenlinien entgegengesetzten Drehsinns wird auch in einem bemerkenswerten Spielzeug für optische Täuschungen verwendet, das in den Dreißigerjahren in Amerika verkauft wurde. Es ist leicht herzustellen, indem man zwei Stücke von Drahtspulen entgegengesetzten Drehsinns zusammenfügt (Bild 5). Die Drähte müssen an mehreren Stellen zusammengelötet werden, damit sich ein starres Gebilde ergibt. Die Täuschung wird hervorgerufen, indem man den Draht jeweils am Ende des überlappenden Mittelstücks zwischen Daumen und Zeigefinger einer jeden Hand nimmt. Bewegt man die Hände auseinander, so gleiten die Finger am Draht

Bild 5 Helisches Spielzeug, das an die Produktion von Neutrinos erinnert.

entlang, versetzen diesen in Drehung und verursachen so den scheinbar auf beiden Seiten entgegengesetzten Drehsinn. Das läßt sich beliebig fortsetzen. In wunderbarer Weise scheint der Draht aus einem unerschöpflichen Mittelstück zu kommen. Da sich Neutrinos und Antineutrinos bekanntlich mit entgegengesetztem Drall bewegen, denke ich an dieses Spielzeug gerne als eine Veranschaulichung für die endlose Produktion von Neutrinos und ihrer spiegelbildlichen Gegenstücke.

Der schraubenförmige Charakter des Weges eines Neutrinos ergibt sich als Überlagerung seiner Vorwärtsbewegung (mit Lichtgeschwindigkeit) und seines „Spins". Schraubenförmige Wege ähnlicher Art werden von vielen bekannten Dingen und Lebewesen beschrieben: ein Punkt auf dem Propeller eines fliegenden Flugzeugs, ein Eichhörnchen, das einen Baum hinauf oder hinunter läuft, die mexikanischen Nacktschwanz-Fledermäuse, die im Gegenuhrzeigersinn kreisen, wenn sie aus ihren Höhlen bei Carlsbad in New Mexiko kommen. Konisch schraubenförmige Kurven werden in Strudeln beschrieben, von ausfließendem Wasser, von Tornados und tausend anderen Naturerscheinungen.

Schriftsteller fanden schraubenförmige Bewegungen für metaphorische Zwecke recht brauchbar. Der wissenschaftliche Fortschritt wird oft mit einer umgedrehten konischen Helix in Verbindung gebracht: Wie die Wissenschaft tiefer ins Unbekannte eindringt, werden die Kreise größer und größer, immerfort aufbauend auf den Kreisen der Vergangenheit. Dieselbe Spirale, ein dunkler, bodenloser Strudel in den ein Individuum oder die ganze Menschheit hinabgleitet, wurde auch als Symbol für Pessimusmus und Verzweiflung verwendet. Dies ist die Metapher, die Norman Mailers Buch "Advertisements for myself" beschließt. „Bin ich schon auf dem Weg hinaus?" fragt er. Zeit ist für Mailer eine konische Helix von Wasser, das auf einen kosmischen Abfluß zuschießt und ihn dabei abspült „hinein in eine Spirale sternerleuchteten leeren Wasser."

Und nun zu einer einfachen Helix-Aufgabe. Auf einen Zylinder sind rote, weiße und blaue Schraubenlinien gemalt. Der Zylinder ist 2 m hoch. Der rote Streifen schneidet die Erzeugenden des Zylinders unter dem konstanten Winkel von 60°. Wie lang ist der rote Streifen?

Es mag so aussehen, als enthielte das Problem nicht genügend Information, um die Länge des Streifens zu berechnen; tatsächlich ist es unerhört einfach, wenn man es richtig angeht.

Lösung

Wickelt man ein rechtwinkeliges Dreieck um irgendeine Art von Zylinder, wobei eine Kathete mit der Basis des Zylinders zusammenfällt, dann beschreibt die Hypotenuse des Dreiecks auf dem Zylinder eine Helix. Man denke sich den roten Streifen als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dann wickle man das Dreieck vom Zylinder ab. Die Winkel des Dreiecks betragen 30° und 60°. Die Hypotenuse eines solchen Dreiecks ist doppelt so lang wie die Höhe. (Das ist leicht einzusehen, wenn man zwei solche Dreiecke zu einem gleichseitigen zusammenfügt.) In unserem Fall ist die Höhe 2 m und damit die Hypotenuse (der rote Streifen) 4 m.

Das Interessante an dieser Aufgabe ist, daß die Länge des Streifens nicht nur vom Durchmesser des Zylinders sondern auch von der Gestalt seines Querschnittes unabhängig ist. Der Querschnitt kann eine unregelmäßige geschlossene Kurve von beliebiger Gestalt sein, die Lösung des Problems bleibt dieselbe.

2 Kleinsche Flaschen und andere Flächen

Three jolly sailors from Blaydon-on-Tyme
They went so sea in a bottle by Klein.
Since the sea was entirely inside the hull
The scenery seen was exceedingly dull.

Frederick Winsor,
The Space Child's Mother Goose

Für den Topologen ist ein quadratisches Stück Papier das Modell einer Fläche mit zwei Seiten und einer einzigen Kante. Wie man es auch zerknüllen mag, es hat immer noch zwei Seiten und eine Kante. Nun stelle man sich das Blatt aus Gummi gefertigt vor. Es läßt sich in ein Dreieck oder einen Kreis verformen oder zu irgend einer anderen Gestalt, die einem gefällt, aber man kann seine Eigenschaft, zwei Seiten und eine Kante zu besitzen, nicht ändern. Dies sind topologische Eigenschaften der Fläche, Eigenschaften, die unverändert bleiben, unabhängig davon, wie man das Blatt biegt, verdreht, dehnt oder staucht.

Zwei andere wichtige invariante topologische Eigenschaften einer Fläche sind ihre chromatische Zahl und ihre Betti-Zahl. Die chromatische Zahl gibt die maximale Anzahl von Gebieten an, die so auf der Fläche gezeichnet werden können, daß jedes Gebiet eine gemeinsame Grenze mit jedem anderen Gebiet besitzt. Färbt man jedes Gebiet verschieden, so wird jede Farbe an alle anderen angrenzen. Die chromatische Zahl des Quadrats ist vier. Anders gesagt: Es ist unmöglich, mehr als vier verschiedenfarbige Gebiete auf dem Quadrat so anzuordnen, daß jedes Paar eine gemeinsame Grenze hat. Der Ausdruck „chromatische Zahl" bezeichnet auch die minimale Anzahl von Farben, die nötig sind, eine Landkarte, mit einer endlichen Anzahl von Unterteilungen auf einer gegebenen Fläche einzufärben. Ob die chromatische Zahl in diesem Sinn des Einfärbens von Landkarten für das Quadrat, den offenen Kreiszylinder und die Kugel 4 ist, ist noch nicht bekannt. Für alle Flächen, die in diesem Kapitel betrachtet werden ist jedoch bewiesen, daß beide Definitionen dieselbe chromatische Zahl ergeben.

Die Betti-Zahl, die nach Enrico Betti, einem italienischen Physiker des neunzehnten Jahrhunderts benannt ist, bezeichnet die maximale Anzahl von Schnitten, die man durchführen kann, ohne die Fläche in zwei getrennte Teile zu zerlegen. Falls die Fläche Kanten besitzt, muß jeder Schnitt „quer" angelegt sein, d. h., Anfangs- und Endpunkt müssen auf Kanten liegen. Ist die Fläche geschlossen (also ohne Kanten), so muß jeder Schnitt „schleifenförmig" sein: Er muß die Gestalt einer einfachen, geschlossenen Kurve haben. Die Betti-Zahl des Quadrats ist offensichtlich O. Durch einen „Querschnitt" erhalten wir sicher zwei getrennte Teile.

Wenn wir einen Zylinder erzeugen, indem wir eine Kante eines Quadrates mit der gegenüberliegenden verbinden, erhalten wir das Modell einer Fläche, die sich topologisch

vom Quadrat unterscheidet. Diese Fläche hat immer noch zwei Seiten, aber es gibt nun zwei getrennte Kanten, wobei jede eine einfache, geschlossene Kurve ist. Die chromatische Zahl bleibt gleich, nämlich 4, aber die Betti-Zahl hat sich verändert; sie ist jetzt 1. Ein quer angelegter Schnitt von einer Kante zur anderen zerstört zwar den Zylinder, aber das Papier bleibt in einem Stück erhalten.

Eine dritte Art Fläche, topologisch die gleiche wie Würfel und Kugel, erhält man folgendermaßen: Man faltet ein Quadrat entlang der Diagonale und verbindet dann die Kanten. Diese Fläche hat weiterhin zwei Seiten, aber es wurden alle Kanten eliminiert. Wir haben nun eine geschlossene Fläche erhalten. Die chromatische Zahl bleibt 4, die Betti-Zahl reduziert sich auf O: jeder schleifenförmige Schnitt erzeugt offensichtlich zwei Teile.

Die Sache wird viel interessanter, wenn wir eine Kante des Quadrats mit der gegenüberliegenden verbinden, die Fläche vorher aber um 180° drehen. Man könnte glauben, dies sei mit einem Quadrat aus Papier nicht durchführbar; es ist jedoch leicht möglich, wenn man das Quadrat zweimal entlang seiner Diagonale faltet, wie es in Bild 6 gezeigt

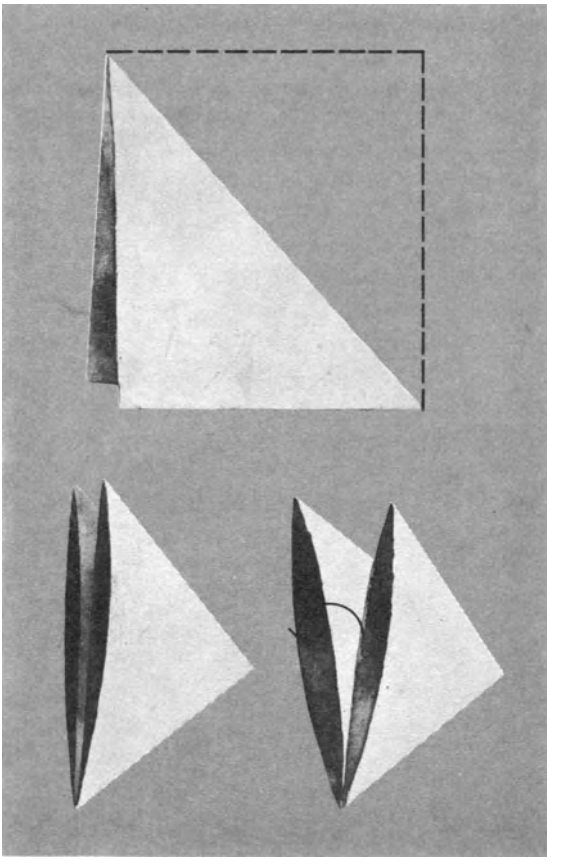


Bild 6
Möbiusband, aus einem Quadrat gefertigt

wird. Nun befestigt man das Kantenpaar so, wie es in der letzten Zeichnung durch den Pfeil angedeutet wird. Das Ergebnis ist das bekannte Möbiusband, das zuerst von F. A. Möbius, einem deutschen Astronomen des 19. Jahrhunderts und einem Pionier der Topologie untersucht worden ist. Unser Modell entfaltet sich nicht, deshalb ist es schwer als Möbiusband zu erkennen. Eine sorgfältige Untersuchung jedoch wird den Leser überzeugen. Diese Fläche hat eine Seite und eine Kante und ihre Betti-Zahl ist 1. Überraschenderweise hat sich die chromatische Zahl auf 6 erhöht. Sechs Gebiete, in sechs verschiedenen Farben, können so auf der Fläche angeordnet werden, daß jedes Gebiet mit jedem der fünf anderen Gebiete eine gemeinsame Grenze hat.

Verbindet man die Paare gegenüberliegender Kanten eines Quadrates ohne vorher eine Drehung durchzuführen, nennt man das Ergebnis Torus oder Kreisringfläche. Topologisch ist es zu einem Würfel äquivalent, durch den ein Loch gebohrt wurde. Bild 7 veranschaulicht, wie man auf einfache Art und Weise ein flaches quadratisches Modell

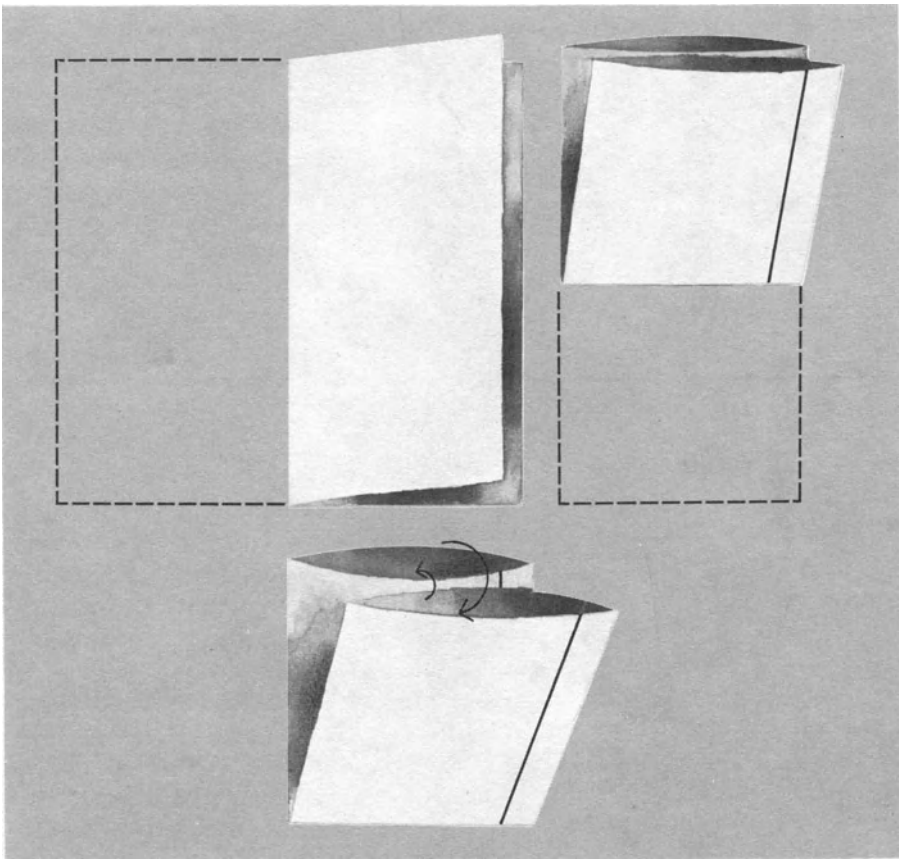


Bild 7 Kreisringfläche, aus einem Quadrat gefaltet

eines Torus erhält: man faltet ein Quadrat zweimal und verbindet die Kanten so, wie es in der zweiten Zeichnung durch den schwarzen Strich und in der letzten Zeichnung durch die Pfeile angedeutet wird. Der Torus hat zwei Seiten und ist geschlossen (d. h. ohne Kanten); seine chromatische Zahl ist 7, seine Betti-Zahl 2. Eine Möglichkeit, diese zwei Schnitte zu machen ist folgende: Zuerst macht man dort, wo man das letzte Kantenpaar verbunden hat einen schleifenförmigen Schnitt (dieser verwandelt den Torus in einen Zylinder), dann bei der Verbindung des ersten Kantenpaares einen quer angelegten Schnitt. Genaugenommen sind beide Schnitte schleifenförmig, wenn man sie auf der Oberfläche des Torus einzeichnet. Da man die Schnitte aber hintereinander ausführen muß, ist der zweite ein quer angelegter Schnitt.

Es ist schwierig vorauszusehen was geschieht, wenn man am Torus verschiedene andere Schnitte anbringt. Falls die ganze Fläche, entweder durch einen horizontalen oder einen vertikalen Schnitt, der jeweils parallel zu den Kantenpaaren ist, in zwei Teile zerlegt wird, so hat man an der Torusfläche zwei schleifenförmige Schnitte angebracht. In jedem Fall sind die beiden Hälften Zylinder. Zerteilt man die Fläche, indem man sie entlang der Diagonalen des ursprünglichen Quadrats durchschneidet, so hat jeder Teil die Gestalt eines Quadrats. Kann nun der Leser eine Art der Schnittführung angeben, wonach die Fläche durch zwei schleifenförmige Schnitte in zwei getrennte Streifen geteilt wird, die miteinander wie die Glieder einer Kette verbunden sind?

Es gibt viele verschiedene Flächen die geschlossen sind wie die Kugel oder der Torus, jedoch, wie das Möbiusband, nur eine Seite haben. Diejenige, die man sich am einfachsten vorstellen kann ist als Kleinsche Flasche bekannt. Sie ist 1882 von Felix Klein, dem großen deutschen Mathematiker entdeckt worden. Eine gewöhnliche Flasche besitzt im folgenden Sinn eine Außen- und Innenseite: falls eine Fliege von innen nach außen krabbeln will muß sie die Kante überqueren, die die Öffnung der Flasche bildet. Die Kleinsche Flasche hat keine Kanten, also kein Innen und kein Außen. Das, was als Innenseite erscheint geht ohne Unterbrechung in die Außenseite über, so wie die zwei augenscheinlichen „Seiten" des Möbiusbandes.

Unglücklicherweise ist es im dreidimensionalen Raum nicht möglich, eine Kleinsche Flasche ohne Selbstdurchdringung zu konstruieren. Bild 8 zeigt, wie man die Flasche üblicherweise darstellt. Man muß sich vorstellen, daß das untere Ende eines Zylinders gedehnt und nach oben gebogen ist, dann durch den Zylinder durchgesteckt und schließlich mit der oberen Öffnung verbunden wird. In einem echten Modell, das etwa aus Glas gefertigt ist, wäre dort, wo sich der Zylinder selbst durchdringt ein Loch. Diesen Mißstand muß man übersehen und sich vorstellen, daß das Loch durch eine Fortsetzung der Oberfläche der Flasche geschlossen ist. Es existiert nämlich gar kein Loch, nur eine Durchstoßung von Flächen. Diese ist notwendig, weil sich das Modell im dreidimensionalen Raum befindet. Wird die Fläche in den vierdimensionalen Raum eingebettet, entfällt die Durchstoßung völlig. Die Kleinsche Flasche hat eine Seite und keine Kante; ihre Betti-Zahl ist 2, ihre chromatische Zahl 6.

Daniel Pedoe, ein Mathematiker an der Universität Purdue, schrieb "The Gentle Art of Mathematics". Es ist dies ein sehr lesenswertes Buch, auf Seite 84 aber verfällt Professor Pedoe unvorsichtigerweise ein wenig ins Dogmatisieren. Er beschreibt die Kleinsche Flasche als eine Fläche, die eine Herausforderung für einen Glasbläser dar-

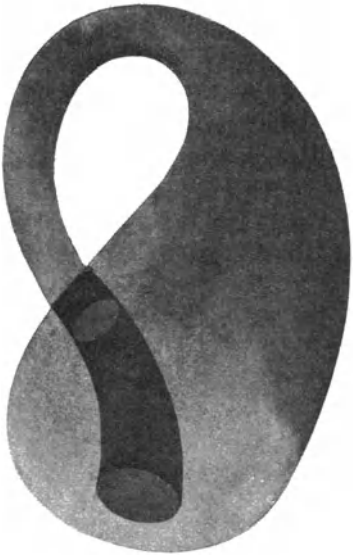


Bild 8
Die Kleinsche Flasche: eine geschlossene Fläche ohne Innen- oder Außenseite

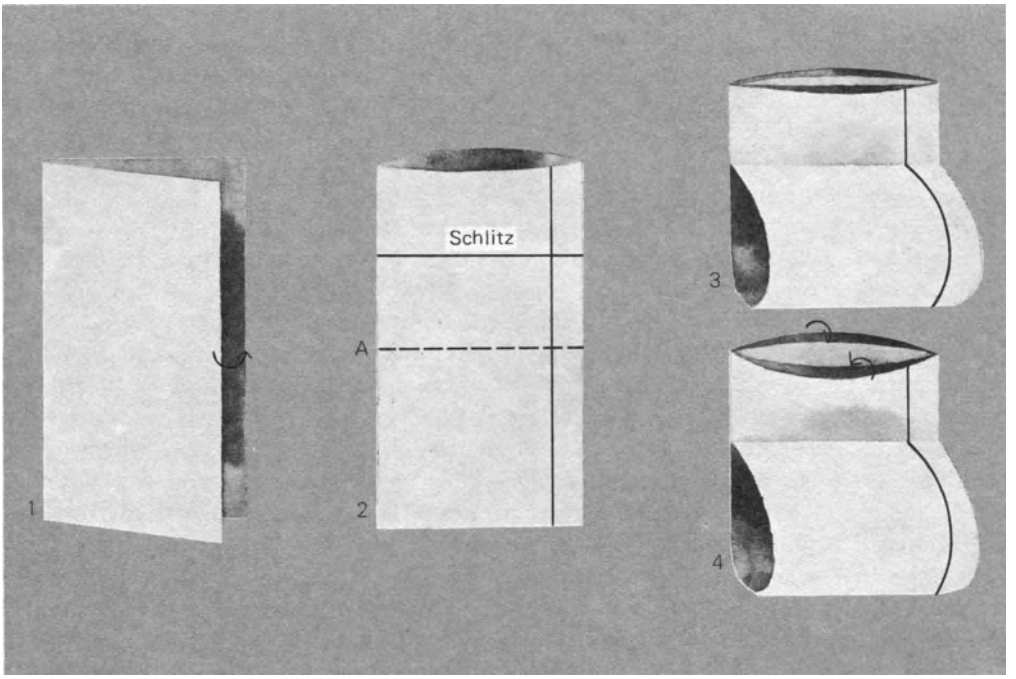


Bild 9 Das Falten einer Kleinschen Flasche aus einem Quadrat

stellt, „die aber nicht aus Papier gemacht werden kann". Nun ist es tatsächlich richtig, daß zu der Zeit als Professor Pedoe dies schrieb, offenbar noch niemand versucht hatte, eine Kleinsche Flasche aus Papier herzustellen. Das war jedoch vor dem Zeitpunkt zu dem sich Stephen Barr, Autor von Science Fiction Romanen und Amateurmathematiker aus Woodstock, New York, diesem Problem zuwandte. Er entdeckte schnell dutzende von Möglichkeiten, wie man aus Papier Kleinsche Flaschen anfertigen kann. Hier soll nur eine von Barrs Flaschen beschrieben werden; eine, die es uns ermöglicht, weiterhin mit einem Quadrat zu arbeiten und die sich eng an das traditionelle Glasmodell anlehnt.

Die einzelnen Schritte sind aus Bild 9 ersichtlich. Zuerst macht man einen Zylinder, indem man das Quadrat zur Hälfte faltet und die entsprechenden Kanten zusammenklebt (Schritt 1). Ungefähr ein Viertel der Länge vom oberen Ende entfernt schlitzt man nun jene Schicht Papier auf, die einem am nächsten liegt (Schritt 2). Dieser Schlitz entspricht dem „Loch" des Glasmodells. Sodann faltet man das Modell entlang der gestrichelten Linie, schiebt das untere Ende des Zylinders durch den Schlitz nach oben (Schritt 3) und verbindet die Kanten rundherum mit dem oberen Ende, wie es die Pfeile anzeigen (Schritt 4). Es ist leicht zu sehen, daß dieses flache, quadratische Modell mit der der Flasche aus Glas im Bild 8 topologisch übereinstimmt. Ja, in einer Hinsicht ist es sogar überlegen: Es ist kein echtes Loch vorhanden. Es existiert natürlich der Schlitz, wo sich die Fläche selbst durchstößt, aber man kann sich leicht vorstellen, daß die Kanten des Schlitzes mit der Fläche verbunden sind und diese überall durchgehend kantenlos ist.

Außerdem kann man das Papiermodell leicht zerschneiden und so viele erstaunliche Eigenschaften der Flasche demonstrieren. Daß ihre Betti-Zahl 2 ist, läßt sich durch zwei schleifenförmige Schnitte entlang der geklebten Kanten veranschaulichen. Halbiert man die Flasche in vertikaler Richtung, so erhält man zwei Möbiusbänder, die zueinander spiegelbildlich sind. Dies läßt sich am besten zeigen, wenn man das Modell nicht aus einem Quadrat, sondern aus einem langen, schmalen Rechteck anfertigt (Bild 10). Halbiert man die Flasche entlang der gestrichelten Linie (dies ist eigentlich ein langer, schleifenförmiger Schnitt um die ganze Flasche herum), so entfaltet sich jede Hälfte zu einem Möbiusband. Beide Bänder durchstoßen sich zu einem Teil selbst, aber man kann jeden Streifen aus diesem Schlitz, der ohnehin nicht vorhanden sein sollte, herausziehen und den Schlitz schließen.

Falls man die Flasche zu einem Paar von Möbiusbändern zerschneiden kann, so sollte auch der umgekehrte Vorgang möglich sein, wie dies im folgenden anonymen Limerick beschrieben wird:

A mathematician named Klein
Thought the Möbius band was divine.
Said he: "If you glue
The edges of two,
You'll get a weird bottle like mine."

Überraschenderweise ist es auch möglich, durch einen einzigen schleifenförmigen Schnitt aus einer Kleinschen Flasche nicht zwei, sondern nur ein Möbiusband zu erhalten.

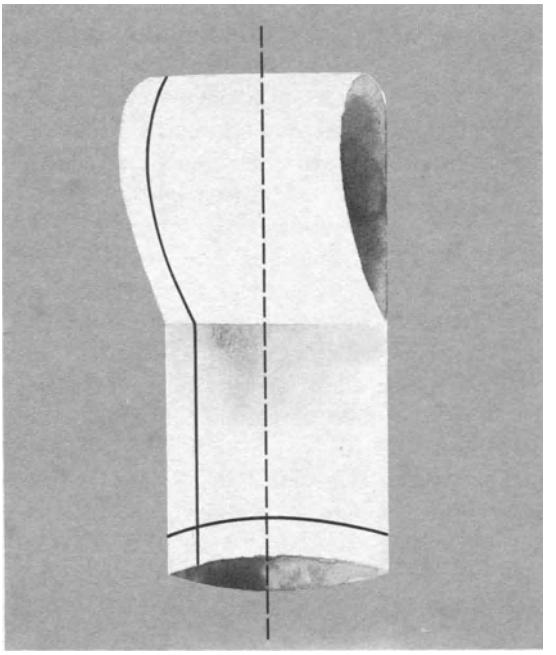


Bild 10
Eine halbierte Flasche ergibt zwei Möbiusbänder

Es ist ein großer Vorteil von Barrs Papiermodell, daß man Probleme dieser Art von der praktischen Seite her angehen kann. Es sei dem Leser überlassen zu entdecken, welcher Art der soeben beschriebene Schnitt sein muß.

Die Kleinsche Flasche ist nicht die einzige einfache Fläche mit einer Seite und ohne Kanten. Eine weitere Fläche, und zwar die projektive Ebene (sie wird deshalb so genannt, weil sie zu einer Ebene, mit der sich die projektive Geometrie beschäftigt, topologisch äquivalent ist) läßt sich in beiden Beziehungen mit der Kleinschen Flasche vergleichen, und auch ihre chromatische Zahl ist 6. Ebenso wie für die Kleinsche Flasche läßt sich auch für die projektive Ebene im dreidimensionalen Raum kein Modell ohne Selbstdurchdringung anfertigen. Bild 11 veranschaulicht eine einfache Methode von Barr, ein solches Modell aus einem Quadrat zu falten. Zuerst schneidet man das Quadrat entlang der durchgehenden schwarzen Linien, wie im Schritt 1 gezeigt wird, ein. Dann faltet man das Quadrat entland der Diagonale AA' und steckt Schlitz C in Schlitz B (Schritte 2 und 3). Man muß sich die Stelle, wo die Schlitze ineinanderstecken als Ort der abstrakten Selbstdurchdringung vorstellen. Nun faltet man die zwei unteren, dreieckigen Flügel E und F nach oben, einen auf jeder Seite (Schritt 4), und befestigt die Kanten wie angedeutet.

Das Ergebnis ist, wie es die Topologen nennen, eine Kreuzkappe, ein sich selbst durchdringendes Möbiusband mit einer Kante, die, ohne weitere Selbstdurchdringung, zu einem Kreis ausgedehnt werden kann. Besagte Kante ist jene, die durch den Schnitt D entsteht, der ursprünglich entlang der Diagonale des Quadrats gemacht worden ist.

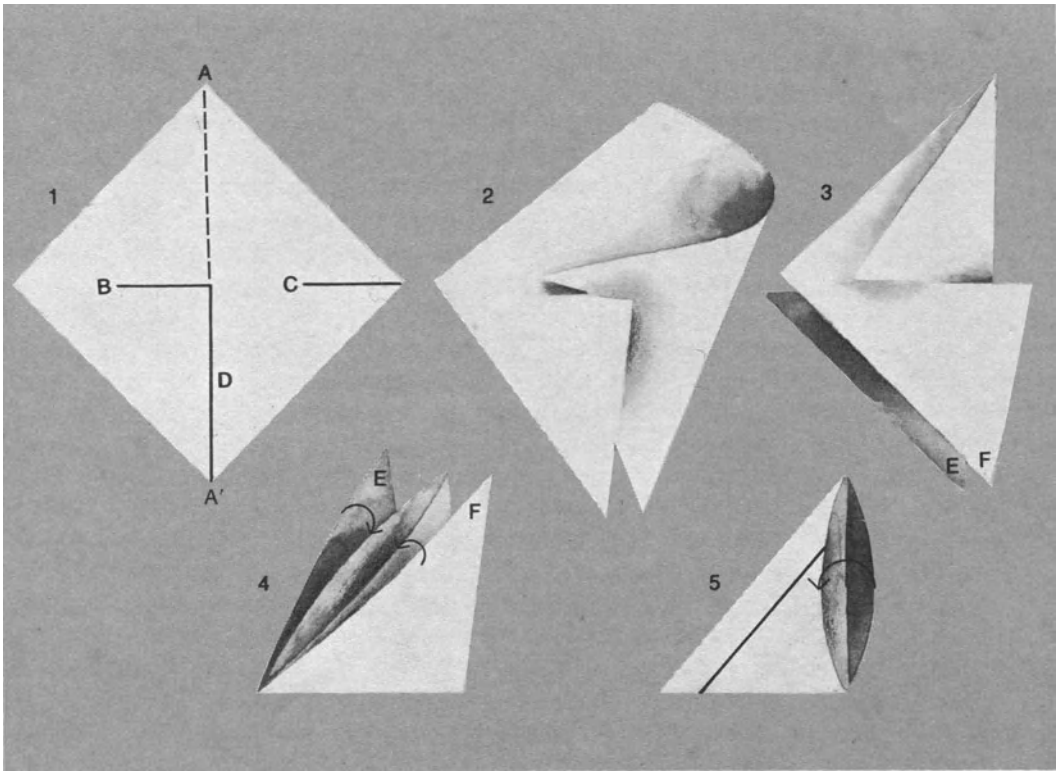


Bild 11 Das Falten einer Kreuzkappe und einer projektiven Ebene aus einem Quadrat

Entgegen den üblichen Modellen eines Möbiusbandes ist dieses hier symmetrisch: weder rechts- noch linksseitig. Klebt man die Ränder der Kreuzkappe zusammen (Schritt 5), so wird aus dem Modell eine projektive Ebene. Man könnte nun vermuten, daß sie dieselbe Betti-Zahl wie die Kleinsche Flasche hat, nämlich 2, aber dies ist nicht der Fall. Ihre Betti-Zahl ist 1. Ungeachtet dessen, wie man einen schleifenförmigen Schnitt anbringt, ergeben sich entweder zwei Teile oder einer, der topologisch äquivalent zu einem Quadrat ist, das man nicht mehr durchschneiden kann ohne es in zwei Teile zu zerlegen. Entfernt man von einem beliebigen Teil der projektiven Ebene eine Kreisscheibe, verändert sich das Modell zu einer Kreuzkappe zurück.

Bild 12 gibt eine Übersicht über all das, was bisher besprochen worden ist.

Die quadratischen Diagramme in der ersten Spalte zeigen, wie bei jedem Modell die Kanten zusammengefügt werden müssen. Es werden jeweils gleichfarbige Linien zusammengefügt und die Richtungen der Pfeile müssen übereinstimmen. Dasselbe gilt für Ecken, die mit demselben Buchstaben bezeichnet sind. Gestrichelte Linien werden im fertigen Modell zu Kanten. Gleichzeitig mit der chromatischen Zahl wird für jede Fläche eine Möglichkeit angegeben, wie man die maximale Anzahl von Farben auf einer

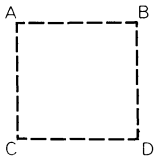
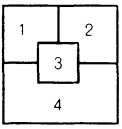
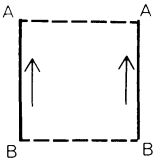
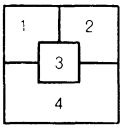
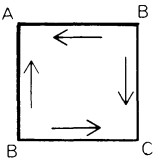
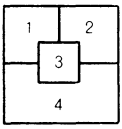
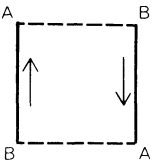
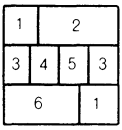
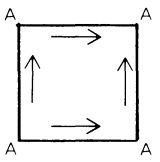
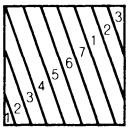
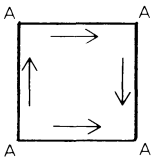
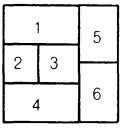
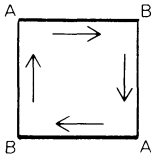
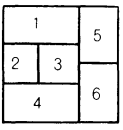
Oberfläche	Anzahl	Flächen	Kanten	Betti-Zahl
Quadrat (oder Platte) 	4 	2	1	0
Rohr 	4 	2	2	1
Kugel 	4 	2	0	0
Möbius-band 	6 	1	1	1
Torus 	7 	2	0	2
Kleinsche Flasche 	6 	1	0	2
projektive Fläche 	6 	1	0	1

Bild 12 gibt eine Übersicht über all das, was bisher besprochen worden ist

Landkarte dieser Gestalt unterbringen kann. Es ist lehrreich, jedes Blatt so wie gezeigt anzufärben, und zwar auf beiden Seiten des Blattes (so als hätte man nicht Papier, sondern Stoff, der die Farbe aufsagt), weil man sich das Papier ja von Nullstärke vorstellen muß. Eine genaue Untersuchung des fertigen Modells ergibt, daß wirklich jedes Gebiet an jedes andere grenzt.

Lösungen

Das Schnittproblem am Torus wird gelöst, indem man zuerst auf dem ungefaltenem Quadrat drei parallele Linien zeichnet (Bild 13). Wird das Quadrat nun, so wie es oben erklärt worden ist, zu einem Torus gefaltet, so formen diese Linien zwei geschlossene Schleifen. Schneidet man entlang dieser Schleifen, so ergibt das zwei ineinandergehakte Bänder, deren jedes zwei Seiten mit zwei halben Drehungen besitzt.

Und wie findet man den schleifenförmigen Schnitt, der die Kleinsche Flasche in ein einziges Möbiusband verwandelt? Der Leser wird bemerkt haben, daß das Papier bei dem Modell aus dem schmalen, langen Rechteck sowohl auf der rechten als auch auf der linken Seite entlang einem Falz gefaltet ist, der eine achtförmige Schleife bildet. Durchschneidet man nur die linke Schleife, so verwandelt sich das Modell in ein Möbiusband; durchschneidet man nur die rechte Schleife erhält man ein identisches Band mit gegenteiligem Drehsinn.

Was geschieht, wenn man beide Schleifen durchschneidet? Das Ergebnis ist ein Band mit zwei Seiten, zwei Kanten und vier halben Drehungen. Wegen des Schlitzes ist das Band an einer Stelle auseinandergeschnitten, so daß man es sich ohne Schlitz vorstellen muß. Dieses sich selbst durchdringende Band ist spiegelsymmetrisch und weder links noch rechtsdrehend. Man kann das Band von der Selbstdurchdringung befreien, indem man es sorgfältig aus dem Schlitz herauszieht und diesen zuklebt. Der Drehsinn des nun entstandenen Bandes (d. h. die Richtung der Schraubenlinien die durch seine Kanten gebildet werden) hängt davon ab, ob man es nach rechts oder nach links herauszieht. Dieses und die früheren Schnittmodelle basieren auf den Papiermodellen, die von Stephen Barr erfunden wurden und die er in seinem Buch "Experiments in Topology" beschreibt.

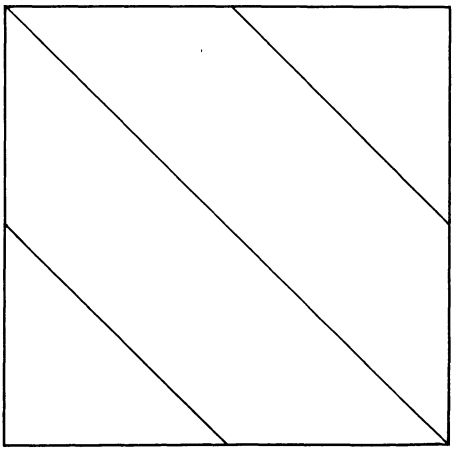


Bild 13
Lösung zum Schnittproblem

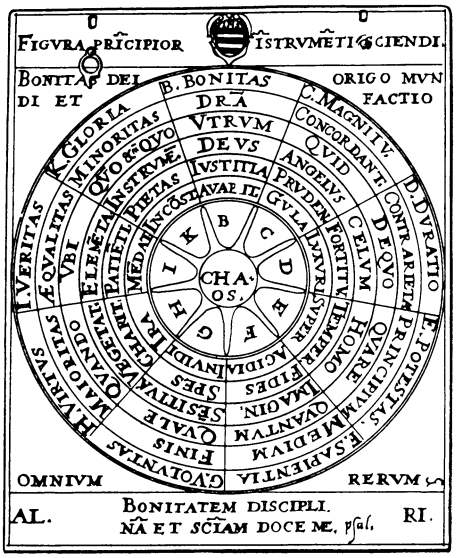
3 Kombinatorik

Sherlock Holmes machte einmal über London folgende Bemerkung: „Inmitten der Aktionen und Reaktionen einer so dichten Menschenmasse muß man damit rechnen, daß jede nur mögliche Kombination von Ereignissen eintreten kann, und so manch eines der auftretenden Probleme wird überraschend und bizarr sein. ... " Setzt man „mathematische Elemente" anstelle von „Menschenmassen", so ist diese Bemerkung des großen Detektivs keine schlechte Beschreibung der kombinatorischen Mathematik.

In der Sprache der Mengentheorie ausgedrückt, beschäftigt sich die kombinatorische Analysis mit der Anordnung von Elementen (diskreten Dingen) zu Mengen unter bestimmten Bedingungen. Ein Schachspieler steht einem kombinatorischen Problem gegenüber: Wie kann er am besten auf einem Gitter aus acht mal acht Feldern unter Beachtung der Spielregeln eine Anordnung von Elementen (Schachfiguren) erreichen, so daß ein bestimmtes Element (der König des Gegners) es nicht mehr vermeiden kann, geschlagen zu werden. Auch ein Komponist steht vor einem kombinatorischen Problem: Wie kann er seine Elemente (Töne) so anordnen, daß sie ästhetisches Vergnügen bereiten. Im weitesten Sinn ist das Leben voll kombinatorischer Probleme: das Aufstellen einer Sitzordnung für Gäste, das Lösen von Kreuzworträtseln, Kartenspielen, das Öffnen eines Safes, das Aufstellen von Stunden- und Fahrplänen, das Wählen einer Telephonnummer. Steckt man einen Schlüssel in ein Zylinderschloß, so benützt man ein mechanisches Hilfsmittel (den Schlüssel) um das kombinatorische Problem zu lösen, fünf kleine Bolzen zu der einen Permutation ihrer Höhen zu bringen, die es dem Zylinder ermöglicht, sich zu drehen. (Die grundlegende Idee geht übrigens auf die hölzernen Zylinderschlösser der alten Ägypter zurück.)

Kombinatorische Zahlenprobleme sind so alt wie die Zahlen selbst. Schon tausend Jahre vor Christus erforschten chinesische Mathematiker Kombinationen und Permutationen von Zahlen. Das *Lo Shu*, ein altes chinesisches magisches Quadrat ist ein elementares Beispiel. Wie kann man die neun Ziffern in eine quadratische Anordnung von acht sich überschneidenden Mengen bringen (Reihen, Spalten und Hauptdiagonalen), deren jede aus drei Ziffern besteht, die summiert immer dieselbe Zahl ergeben. Schließt man Drehungen und Spiegelungen aus, so ist das *Lo Shu* (Bild 18, Seite) die einzig mögliche Lösung. Es ist eine vergnügliche Übung im kombinatorischen Denken, zu erkennen, wie einfach man die Eindeutigkeit der Anordnung im *Lo Shu* beweisen kann. (Ein guter Beweis findet sich in Maurice Kraitchiks "Mathematical Recreations"; New York: Dover, 1953, S. 146-147.)

Im dreizehnten Jahrhundert trieb Ramón Lull, ein exzentrischer spanischer Theologe, einen blühenden Kult um das kombinatorische Denken. Lull war leidenschaftlich davon überzeugt, daß man jedes Wissensgebiet auf ein paar grundlegende Prinzipien reduzieren und durch Erforschen aller möglichen Kombinationen dieser Prinzipien neue Wahrheiten entdecken könne. Um dem Intellekt bei solchen Unternehmungen behilflich zu sein, benützte Lull konzentrische Scheiben, die im zentralen Punkt mit



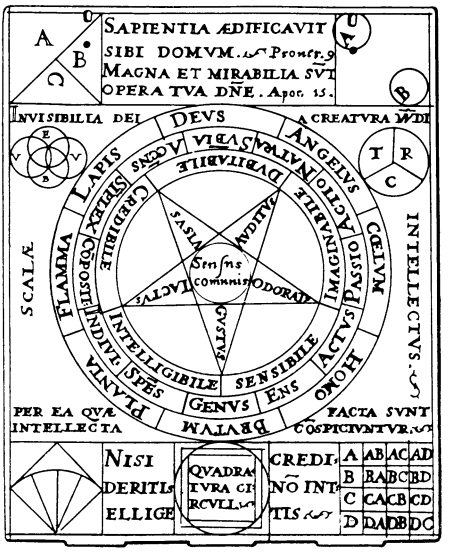


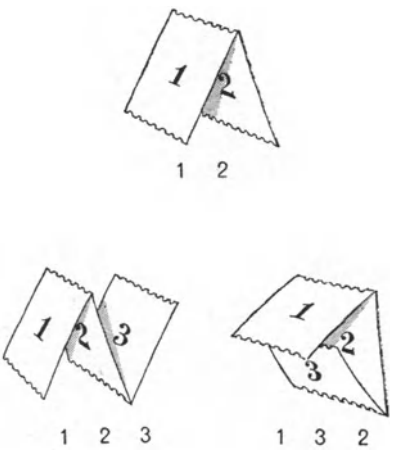
Bild 14 Zwei von Ramón Lulles kombinatorischen Rädern

einer Nadel aufgespießt waren. Entlang des Randes brachte er Buchstaben an, die die grundlegenden Ideen des zur Diskussion stehenden Wissensgebietes symbolisieren. Indem man nun die Scheiben drehte, konnte man alle möglichen Kombinationen der Ideen durchspielen (Bild 14). Heute findet man Überreste von Lulls Methode noch in Anleitungen zu „schöpferischem Denken".

Bis zum neunzehnten Jahrhundert betrachtete man das Studium kombinatorischer Probleme, wie der magischen Quadrate, entweder als mystische Aufgabe oder als mathematische Unterhaltung. Bis heute bilden sie einen großen Anteil der mathematischen Rätsel, von denen einige nur triviale Tricks sind: Eine Lade enthält zwei rote Socken, zwei grüne Socken und zwei blaue Socken. Wie viele Socken muß man mindestens herausnehmen, um auch bei geschlossenen Augen mit Sicherheit ein Paar derselben Farbe zu erhalten?

Es gibt auch Aufgaben mittleren Schwierigkeitsgrades, wie diese: Auf wie viele Arten kann man einen Dollar wechseln, wenn man einen unbegrenzten Vorrat an Halb- und Viertel-Dollar-Münzen, sowie an Zehn-, Fünf- und Ein-Cent-Münzen hat?

Es gibt auch Probleme, die so schwierig sind, daß sie bis heute nicht gelöst wurden: Man suche eine allgemeine Formel für die Anzahl der verschiedenen Arten, auf die ein Streifen von n Briefmarken gefaltet werden kann. Man nimmt an, daß die Marken auf beiden Seiten unbeschrieben sind. Zwei Faltungsmöglichkeiten sind dann nicht „verschieden", wenn man das eine gefaltete Paket durch Bewegungen im Raum in das andere überführen kann. Für zwei Marken gibt es nur eine Möglichkeit, für drei Marken vier, für vier Marken fünf (Bild 15). Der Leser soll nun versuchen herauszufinden, wie viele verschiedene Möglichkeiten es für einen Streifen von fünf Marken gibt.



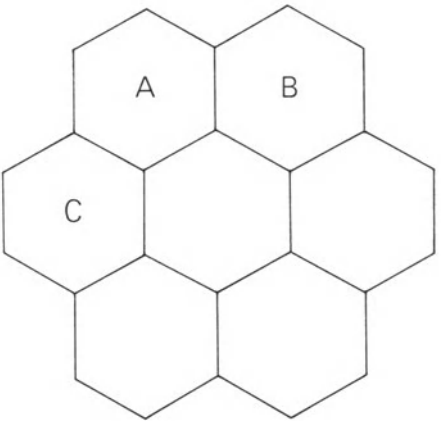


Bild 16 Ein Unmöglichkeitsbeweis für das magische Sechseck „zweiter Ordnung"

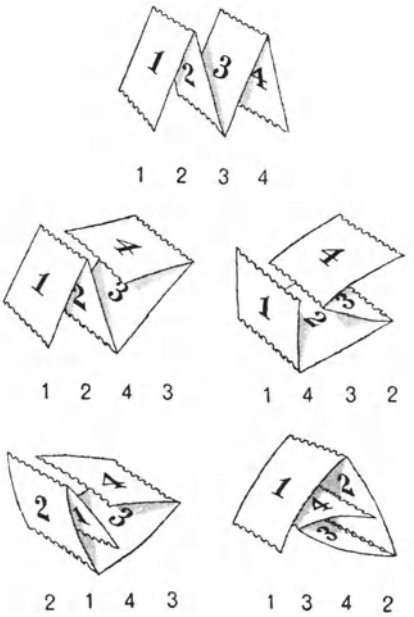


Bild 15
Möglichkeiten, zwei, drei und vier Marken zu falten

Erst seit 1900 wird die kombinatorische Analysis als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik betrachtet und in den fünfziger Jahren entwickelte sie sich dann plötzlich zu einer neuen, aktiven Disziplin. Für diese Zunahme des Interesses gibt es viele Gründe. Die moderne Mathematik beschäftigt sich intensiv mit logischen Grundlagen und in der formalen Logik nehmen kombinatorische Probleme einen wichtigen Platz ein. Die modernen Naturwissenschaften befassen sich häufig mit Wahrscheinlichkeits-

theorie und die meisten Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigen zuerst eine kombinatorische Analyse. In fast allen naturwissenschaftlichen Forschungsgebieten entdeckt man heute nicht Kontinuität sondern diskrete Elemente: Moleküle, Atome, Teilchen, die Quantenzahlen für Spannung, Spin, Parität usw. Wolfgang Paulis „Ausschließungsprinzip", durch das man schließlich die Struktur des Periodensystems der Elemente erklären konnte, war das Ergebnis kombinatorischen Denkens.

Die große Revolution, die gerade in der Biologie vor sich geht, beruht auf der sensationellen Entdeckung, daß die genetische Information von einem Nukleinsäurekode getragen wird, für dessen Bildung vier Buchstaben zur Verfügung stehen, die in Triplets zusammengefaßt sind; auf eine Art also, die von Freizeitmathematikern schon seit mehr als einem Jahrhundert erforscht wird. Vielleicht ist es kein Zufall, daß der erste Hinweis darauf, daß der genetische Kode aus Triplets von vier Symbolen besteht, von dem Physiker George Gamow stammt, der ein starkes Interesse für mathematische Rätsel zeigte. (Die Geschichte der Entstehung dieser bemerkenswerten Einsicht kann man im Nachwort von Gamow Autobiographie "My World Line" nachlesen.) Die Informationstheorie mit ihren Kodeworten und Bits, die Computer durch ihre ja-nein Entscheidungsprozesse, verlangen die Lösung einer Unzahl kombinatorischer Probleme. Andererseits wurden durch den Computer Lösungen kombinatorischer Probleme ermöglicht, die vorher nicht zugänglich waren. Auch darin dürfte ein Grund für das steigende Interesse an der kombinatorischen Mathematik liegen.

Die zwei wichtigsten Arten kombinatorischer Fragestellung sind „Existenz- und Aufzählungsprobleme". Ein Existenzproblem besteht einfach aus der Frage, ob ein bestimmtes Muster, eine bestimmte Anordnung, existiert oder nicht. Es kann durch ein Beispiel oder einen Beweis über die Möglichkeit oder die Unmöglichkeit gelöst werden. Falls eine bestimmte Anordnung existiert, folgen Aufzählungsprobleme. Wie viele Varianten des Musters gibt es? Wie kann man sie am besten klassifizieren? Welche Muster erfüllen verschiedene Maximal- und Minimalbedingungen? – und so weiter.

Man kann beide Problemtypen durch das folgende Beispiel veranschaulichen: Ist es möglich, die Menge der positiven Zahlen von 1 bis n derart in einem hexagonalen Raster von n Zellen anzuordnen, daß alle Reihen dieselbe Summe ergeben? Mit anderen Worten: Gibt es ein magisches Sechseck?

Die einfachste Anordnung geht aus Bild 16 hervor. Kann man nun die Zahlen von 1 bis 7 so auf diese sieben Zellen verteilen, daß jede Reihe dieselbe Summe hat? Die Summe, magische Konstante genannt, läßt sich leicht ermitteln. Man braucht nur die Zahlen von 1 bis 7 zu addieren und dann durch 3 zu dividieren, also durch die Anzahl der parallelen Reihen die es in jeder Richtung gibt. Da die magische Konstante aber eine ganze Zahl sein muß, haben wir bewiesen, daß es ein magisches Sechseck „zweiter Ordnung" (die Ordnung ist die Anzahl der Zellen an jeder Seite) nicht gibt. Zu einem noch einfacheren Beweis betrachtet man die Eckzelle A. Sie gehört zwei Reihen an, die jeweils nur aus zwei Zellen bestehen. Falls nun beide Reihen dieselbe Summe haben sollten, müßten B und C dieselbe Zahl enthalten, was aber den ursprünglichen Bedingungen widerspricht.

Gehen wir nun zur nächst größeren Anordnung über, dem Sechseck dritter Ordnung mit 19 Zellen. Hier sehen wir, daß die Summe der Zahlen, 190, durch 5, das ist

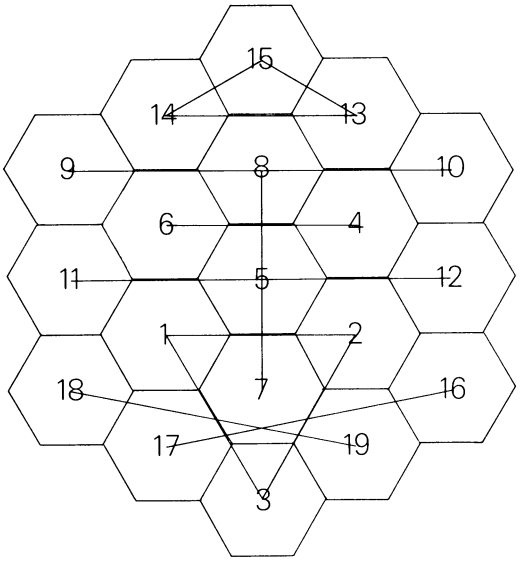


Bild 17
Das einzig mögliche magische Sechseck

die Anzahl der parallelen Reihen in einer Richtung, teilbar ist. Die magische Konstante ist 38. Der obige Unmöglichkeitsbeweis läßt sich nicht wiederholen, was aber natürlich noch nicht besagt, daß ein magisches Sechseck dritter Ordnung wirklich existiert.

Im Jahr 1910 begann Clifford W. Adams, ein pensionierter Bahnbeamter, der nun in Philadelphia lebt, nach einem magischen Quadrat dritter Ordnung zu suchen. Er ließ sich ein Set sechseckiger Keramikfliesen anfertigen, die die Zahlen von 1 bis 19 trugen und probierte mit ihnen verschiedene Anordnungen aus. Siebenundvierzig Jahre lang beschäftigte er sich zu den unmöglichsten Zeiten mit diesem Problem. Während er sich 1957 gerade von einer Operation erholte fand er eine Lösung (Bild 17). Er notierte sie schnell auf ein Blatt Papier, verlegte dies aber und bemühte sich die nächsten fünf Jahre lang vergeblich, die Lösung zu rekonstruieren. Im Dezember 1962 fand er diesen Zettel wieder und sandte ihn mir bald darauf. Jede der Reihen hat als Summe 38. Die farbigen Linien verbinden jeweils zwei oder drei aufeinanderfolgende Zahlen und verdeutlichen so die bemerkenswerte zweiseitige Symmetrie dieser Anordnung. (Wenn man das *Lo Shu* so dreht, daß Zelle 2 oben, Zelle 8 unten ist und die Triplets (1, 2, 3), (4, 5, 6) und (7, 8, 9) durch Linien verbunden werden, zeigt sich eine ähnliche Symmetrie.)

Als ich dieses Sechseck von Adams erhielt, war ich nur gelinde beeindruckt. Ich nahm an, daß es ausreichend Literatur über magische Sechsecke gäbe und daß Adams nur eine von hunderten anderen Möglichkeiten für Sechsecke dritter Ordnung entdeckt hätte. Zu meiner Überraschung erbrachte ein Überprüfen der Literatur kein einziges magisches Sechseck. Ich wußte, daß es 880 verschiedene Varianten für magische Quadrate der Ordnung vier gab und daß die fünfter Ordnung noch nicht vollständig aufgezählt worden waren, weil sich ihre Anzahl in den Millionen bewegt. Es erschien mir deshalb ungewöhnlich, daß noch nichts über magische Sechsecke veröffentlicht worden war.

Ich sandte Adams Sechseck an Charles W. Trigg, einen Mathematiker an der Universität von Los Angeles, der ein Fachmann für kombinatorische Probleme dieser Art ist. Seine Antwort bestätigte, daß das Sechseck noch unbekannt gewesen sei. Ein Monat später wurde ich durch Triggs formalen Beweis, daß es kein anderes magisches Hexagon *beliebiger* Ordnung gäbe, verblüfft. Von all den unendlich vielen Möglichkeiten, die ganzen Zahlen von 1 bis n in einem sechseckigen Raster anzuordnen, ist nur *ein* Muster magisch!

Triggs Unmöglichkeitsbeweis für Ordnungen höher als 3 greift auf diophantische Analysis zurück, auf Methoden, wie man für Gleichungen ganzzahlige Lösungen erhält. Zuerst erarbeitet Trigg eine von n abhängige Formel für die magische Konstante:

$$\frac{9\,(n^4 - 2\,n^3 + 2\,n^2 - n) + 2}{2\,(2\,n - 1)}\,.$$

Dies kann einfach in eine Gleichung umgeschrieben werden, in der $5/(2\,n - 1)$ ein ganzzahliger Ausdruck ist. Damit er ganzzahlig ist, muß n entweder 1 oder 3 sein. Ein magisches Sechseck mit einer Zelle ist natürlich trivial. Adams hat eine Anordnung für die dritte Ordnung gefunden. Gibt es kein anderes Muster für die 19 ganzen Zahlen (wenn man Drehungen und Spiegelungen nicht zählt), das magisch ist? Die negative Antwort erhielt Trigg durch eine Kombination einer brutalen Methode (er benützte eineinhalb Ries Papier, auf dem das Muster sechsmal aufgezeichnet war) und klugen Vereinfachungen. Sein Ergebnis wurde später durch zahlreiche Computerprogramme bestätigt. (Trigg erklärt seinen Beweis und verschiedene ungewöhnliche Eigenschaften des Sechsecks in "A Unique Magic Hexagon", in "Recreational Mathematics Magazine", Januar 1964.)

Der Leser wird nun zu der folgenden einfachen Übung eingeladen: Die 19 Zahlen in Adams Sechseck sind so anzuordnen, daß das Muster auf folgende Weise magisch bleibt: Die Summe jeder zweizelligen Reihe soll 22 betragen, die jeder vierzelligen 42, die jeder fünfzelligen 62. Magische Sechsecke *diesen* Typs sind schon früher erforscht worden und sind in großer Zahl vorhanden. (Das Problem läßt sich mit der nötigen Einsicht leicht lösen. *Hinweis*: Die neue Anordnung kann erreicht werden, indem man jede Zahl der gleichen, einfachen Transformation unterwirft.)

Eine einzigartige, elegante Anordnung von ganzen Zahlen hat meist viele ungewöhnliche Eigenschaften. Sogar das alte *Lo Shu* birgt nocht Überraschungen in sich. Vor ein paar Jahren entdeckte Leo Moser von der Universität in Alberta ein lustiges Paradoxon, das entsteht, wenn man das Lo Shu als Diagramm der relativen Stärke von neun Schachspielern betrachtet (Bild 18). Reihe A sei ein Team von drei Schachexperten mit der jeweiligen Spielstärke 4, 9 und 2. Reihen B und C seien zwei andere Teams mit den entsprechenden Spielstärken. Spielen nun die Teams A und B ein Turnier, in dem jeder Spieler des einen Teams einmal gegen jeden Spieler des anderen Teams spielt, dann gewinnt Team B fünf Spiele, Team A vier. B ist eindeutig stärker als A. Spielt nun Team B gegen C, so gewinnt C fünf Spiele und verliert vier. Somit ist C stärker als B. Was geschieht nun, wenn C, das stärkste Team, gegen A, das schwächste, spielt. Versuchen Sie, es selbst herauszufinden! Team A gewinnt fünf zu vier. Welches Team ist nun das stärkste? Dieses Paradoxon veranschaulicht die Problematik solcher Turniere, bei denen man die relative Stärke von Teams ermitteln will. Moser hat viele Paradoxa

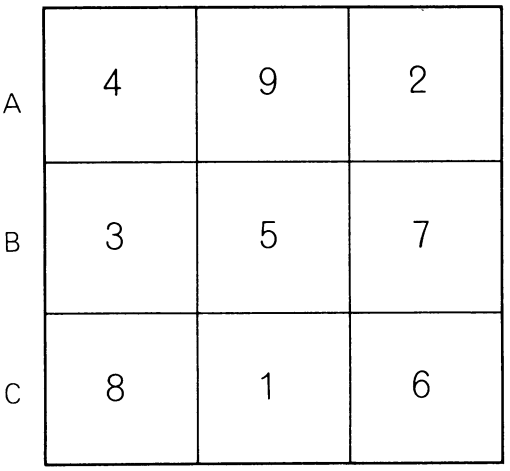


Bild 18
Lo Shu, das alte chinesische magische Quadrat

dieser Art analysiert und dieses hier ist eines der einfacheren. Das Paradoxon bleibt bestehen, wenn man anstelle der Reihen die Spalten des *Lo Shu* betrachtet.

Moser weist noch darauf hin, daß sich bei Wahlen ähnliche Paradoxa ergeben. Nehmen wir zum Beispiel an, daß die Prioritätenliste einer Person unter drei Kandidaten die Reihenfolge *A, B, C* habe. Eine andere Person bevorzugt die Reihung *B, C, A* und eine dritte *C, A, B* . Es ist sofort ersichtlich, daß eine Mehrheit der drei Wähler *A* gegenüber *B* bevorzugt, eine Mehrheit *B* gegen *C* und (verwirrenderweise) auch eine Mehrheit *C* gegenüber *A*! Dieses einfache Paradoxon wurde offensichtlich erstmals im Jahr 1785 vom französischen Mathematiker Marquis de Concordet diskutiert und von Lewis Carroll zuerst wiederentdeckt. Carroll hat auch einige interessante Broschüren über Wahlverfahren veröffentlicht. (Zu einer Geschichte des Paradoxons und einer Aufzählung der wichtigsten neueren Werke vergleiche man William H. Riker, "Voting and the Summation of Preferences", in "The American Political Science Review", Dezember 1961. Über die Anwendung des Paradoxons bei der Bewertung rivalisierender Teams vergleiche E. V. Huntington, "A Paradox in the Scoring of Competing Teams", in "Science", Bd. 88, 1938, S. 287-288.)

Ein Großteil der modernen kombinatorischen Probleme besteht im Anordnen von Elementen in quadratischen und rechteckigen Matrizen. Viele davon haben auf dem Gebiet des experimentiellen Entwerfens eine nützliche Anwendung gefunden. In lateinischen Quadraten sind die Elemente so angeordnet, daß ein Element einer bestimmten Art in jeder Reihe und Spalte nur einmal auftritt. Dazu gibt es ein nettes kombinatorisches Problem, das nicht schwierig ist, aber eine knifflige Seite an sich hat, die dem Leser vielleicht entgeht:

Es steht ein unbegrenzter Vorrat an Briefmarken zu ein, zwei, drei, vier und fünf Cent zur Verfügung (gemeint ist ein unbeschränkter Vorrat von jedem Wert). Nun sollen so viele Marken wie möglich derart in einer vier-mal-vier Matrix angeordnet werden, daß nie zwei gleichwertige Marken in derselben Reihe, Spalte oder irgendeiner der Dia-

gonalen auftreten (nicht nur in den beiden Hauptdiagonalen). Anders ausgedrückt: Falls man eine Schachdame auf irgendeine Marke in dem Quadrat stellt und einen einzigen Zug in eine beliebige Richtung durchführt, wird die Dame nie zwei gleichwertige Marken berühren. Es gibt aber noch eine Bedingung: Der Gesamtwert der Marken im Quadrat soll maximal sein. Wie groß ist das Maximum? Keine Zelle darf mehr als eine Marke beinhalten, aber es können nach Belieben eine oder mehrere Zellen frei bleiben.

Anhang

Nachdem ich das magische Sechseck veröffentlicht hatte, lenkte John R. A. Cooper meine Aufmerksamkeit auf eine nicht kommentierte frühere Publikation durch Tom Vickers in "The Mathematical Gazette", Dezember 1958, Seite 291. Soweit ich weiß, war dies das erste Mal, daß das Hexagon im Druck erschien. Karl Fabel sandte mir einen Brief, den er von Martin Kühl aus Hannover erhalten hatte, aus dem hervorgeht, daß auch Kühl unabhängig das Sechseck entdeckt (um 1940), aber nicht veröffentlicht hatte.

Ein Leitartikel über Clifford W. Adams Entdeckung des Musters, geschrieben von Karl Abrahams, erschien in Philadelphia im "Evening Bulletin" vom 19. Juli 1963, Seite 18; ein weiterer Artikel, der die Lösung brachte (die zu suchen die Leser aufgefordert worden waren) erschien in der Ausgabe vom 30. Juli.

Lösungen

Dies sind die Lösungen der kombinatorischen Probleme:

Vier Socken garantieren ein Paar gleicher Farbe.

Einen Dollar kann man auf 292 verschiedene Arten wechseln. Für eine vollständige Lösung vergleiche man die letzten zwei Seiten von George Polyas "How to Solve It", 2. Auflage, New York: Doubleday, 1957.

Ein aus fünf Marken bestehender Streifen, die auf beiden Seiten unbedruckt sind, kann auf 14 verschiedene Arten gefaltet werden (Bild 19). (Sind die Marken auf einer Seite bedruckt, so könnte man denken, daß sich die Anzahl verdoppelt, aber sie erhöht sich nur auf 25. Warum?)

Das Problem, eine Formel für n Marken zu finden bleibt ungelöst, aber es sind rekursive Verfahren entwickelt worden, durch die man mit dem Computer leicht die Anzahl der verschiedenen Faltmöglichkeiten ausrechnen kann. Dieses Problem wurde erstmals von S. M. Ulam formuliert. Im Jahr 1961 fand Mark B. Wells mit Hilfe des Computers der Los Alamos Scientific Laboratories heraus, daß die Anzahl der verschiedenen Faltmöglichkeiten für sechs, sieben, acht und neun Marken jeweils 38, 120, 353 bzw. 1148 sind. Neuere Ergebnisse findet man bei W. F. Lunnon, "A Map-folding Problem", in "Mathematics of Computation", Januar 1968, und bei John E. Koehler, "Folding a Strip of Stamps", in "Journal of Combinatorial Theory", September 1968. Für den Fall, daß man nach den verschiedenen Möglichkeiten fragt, wie man quadratische Bogen zu einem Stoß Einheitsquadrate falten kann, ist das Problem, eine nichtrekursive Formel zu finden, schwieriger und auch noch ungelöst.

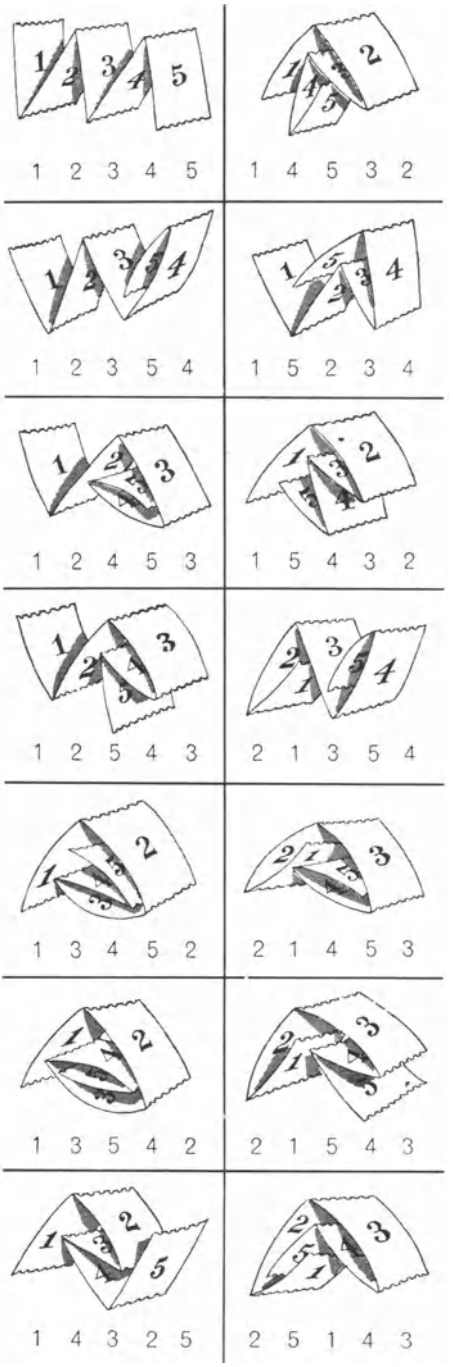


Bild 19
Lösung zum Markenfaltproblem

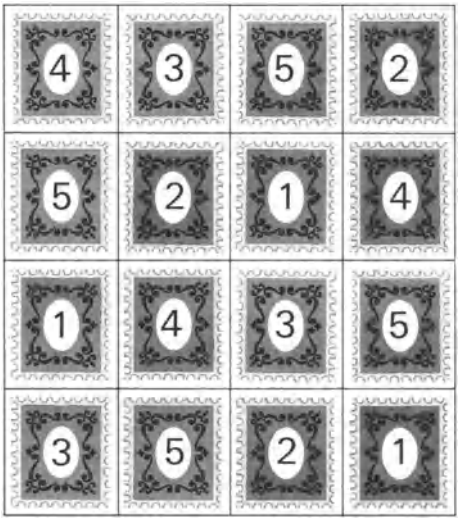


Bild 20 Eine Lösung des Anordnungsproblems für Marken

Um das magische Sechseck so zu verändern, daß die Summe jeder dreizelligen Reihe 22, die Summe jeder vierzelligen 42 und die jeder fünfzelligen 62 beträgt, muß man in jeder Zelle die Zahl mit ihrer Differenz auf 20 austauschen.

Das Problem, Marken zu ein, zwei, drei, vier und fünf Cent in einem vier-mal-vier Quadrat so anzuordnen, daß nie zwei Marken mit demselben Wert in irgendeiner Reihe, Spalte oder Diagonale (wobei auch die kürzeren Diagonalen zu beachten sind) zu liegen kommen, läßt sich mit einem maximalen Wert von 50 Cent lösen. (Bild 20 zeigt eine von vielen Lösungen). Das sind wahrscheinlich 2 Cent mehr als viele Leser erreichen konnten, falls sie vier 4-Cent-Marken verwendeten und zwei Zellen unbesetzt ließen. Der Dreh besteht darin, nur drei 4-Cent-Marken zu verwenden. Henry Dudeney schrieb "Amusements in Mathematics" (Problem 308): „Wenn der Leser diese Lösung sieht, wird er sich wie ein blutiger Anfänger vorkommen".

Donald E. Knuth fand heraus, daß sich Dudeneys Lösung zu einem bemerkenswerten fünf-mal-fünf Quadrat vergrößern läßt, das alle Bedingungen erfüllt und einen maximalen Wert von 75 Cent ergibt. Es genügt dazu, oben die Reihe 2, 1, 4, 3, 5 und an der rechten Seite (von oben nach unten gelesen) 5, 1, 3, 2, 4 hinzuzufügen. Jeder Wert tritt fünf Mal auf. Dies ist äquivalent zu der Aufgabe, zu dem Problem der nicht angreifenden Königinnen auf dem fünf-mal-fünf Brett fünf Lösungen hinzuzufügen. (vgl. Kapitel 16 meines Buches „Logik unterm Galgen", Friedr. Vieweg & Sohn, 1978).

4 Springende Bälle in Vielecken und Polyedern

Seit Menschengedenken ist ein springender Ball unentbehrlicher Bestandteil einer erstaunlichen Vielfalt von Sportarten; dies gilt für Spiele, die im Freien ausgetragen werden als auch in Hallen. Der Anwendungsbereich erstreckt sich von einfachen Kinderspielen mit Gummibällen bis zu Sportarten wie Tennis, Handball und Billard, bei denen die Fähigkeit, Ein- und Ausfallwinkel abzuschätzen, einen wesentlichen Bestandteil der Fertigkeiten eines Spielers ausmacht.

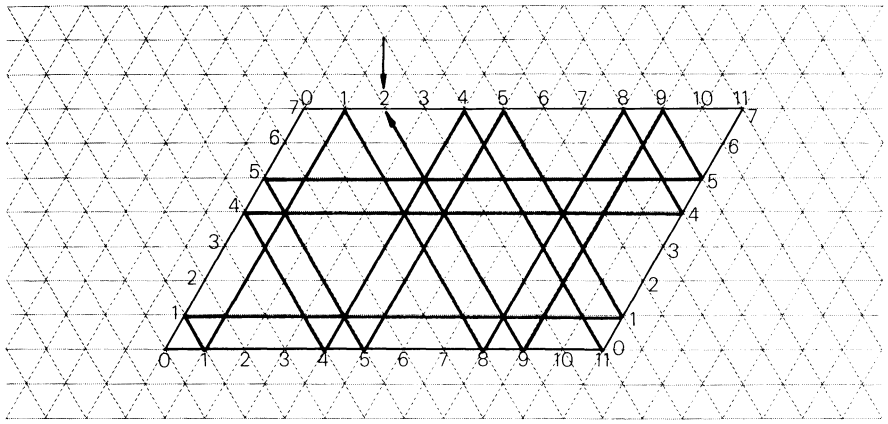
The balls
shine round and clear, quick blobs,
of colour on faultless fields,
where rapid vengeance rolls
and clicks, returns
or poorly judged, deflects
to pass and spend itself in motion
rebounding gingerly from cushins ...

Herman Spectors, "B. A. (Billard Academy)"

Mathematiker und Physiker sind dafür bekannt, daß sie gerne verschiedene Arten Billard spielen. Das ist leicht zu verstehen. Das behutsame Zurückschnellen in einem fehlerlosen Spielfeld kann ganz genau berechnet werden. Lewis Carroll, ein Mathematikprofessor an der Universität Oxford, spielte sehr gerne Billard, besonders an einem *runden* Tisch, den er sich eigens anfertigen ließ. Die Erstausgabe seiner Spielregeln, eine zweiblättrige Broschüre, die er 1890 veröffentlichte, ist ein begehrtes Sammelobjekt.

Hunderte unterhaltsamer Probleme beschäftigen sich mit dem Rückprall elastischer Bälle innerhalb einer Umrahmung, die von unterschiedlichster Gestalt sein kann. Denken wir nur an folgendes alte Rätsel: Man hat zwei Gefäße zur Verfügung, die 7 bzw. 11 Liter fassen. Daneben steht eine Tonne mit Wasser. Wie kann man, wenn man nur diese zwei Gefäße benützt (und unter Ausschluß aller Schliche, wie etwa die Behälter mit einer Skala zu versehen oder zu neigen, um Teilmengen abmessen zu können) genau zwei Liter abmessen?

Diese Aufgabe läßt sich sowohl durch reines Ausprobieren als auch mit verschiedenen algebraischen Verfahren lösen. Aber was hat das alles mit elastischen Bällen zu tun? Überraschenderweise lassen sich derartige Probleme, bei denen Flüssigkeitsmengen zu messen sind, sehr einfach lösen, indem man den Weg elastischer Bälle innerhalb *rhomboidförmiger* Skalen verfolgt! (Diese Methode beruht auf einem „gerichteten Graphen", wie die Topologen sagen, und wurde erstmal von M. C. K. Tweedie in "The



11-Liter-Gefäß	11	4	4	0	11	8	8	1	1	0	11	5	5	0	11	9	9	2	
7-Liter-Gefäß	0	7	0	4	4	7	0	7	0	1	1	7	0	5	5	7	0	7	

Bild 21 Schaubild und Lösung zum Problem des Umschüttens von Flüssigkeiten

Mathematical Gazette", Juli 1939, erklärt.) Die Banden solcher Tische zeichnet man sich am besten auf isometrisches Zeichenpapier: ein Papier mit einem Gitter aus gleichseitigen Dreiecken. In unserem Fall sind die Seitenlängen jeweils 7 bzw. 11 Einheiten lang (Bild 21). Die Werte auf der horizontalen Achse stehen für die Wassermenge, die sich zu einer beliebigen Zeit im 11-Liter-Gefäß befindet und die Werte auf der vertikalen Achse geben an, wieviel Wasser im 7-Liter-Gefäß ist.

Zur Deutung des Schaubildes muß man sich einen Ball in der linken unteren Ecke im Punkt 0 vorstellen. Er bewegt sich nach rechts entlang der Grundlinie des Parallelogramms bis er die rechtsseitige Begrenzung berührt; dies geschieht an jenem Punkt der Grundlinie, der mit 11 bezeichnet ist. Das bedeutet, daß das 11-Liter-Gefäß gefüllt wurde und der 7-Liter-Behälter leer bleibt. Nachdem der Ball von der rechtsseitigen Begrenzung abgeprallt ist, bewegt er sich nach links oben bis er an die obere Begrenzung stößt, und zwar am Punkt 4 der vertikalen und der siebenten Linie der horizontalen Koordinate. Dieser Schritt bedeutet, daß vom 11-Liter-Gefäß 7 Liter in den 7-Liter-Behälter geschüttet worden sind und somit im größeren Gefäß noch 4 Liter zurückblieben.

Folgt man dem elastischen Ball weiterhin, bis er einen Punkt erreicht, der mit 2 bezeichnet ist und notiert man jeden Schritt genau, so erhält man in 18 Schritten jene Lösung, die unterhalb des Schaubildes gezeigt wird. Schräge Pfeile bedeuten, daß das Wasser von einem Gefäß in das andere geleert wird; senkrechte Pfeile bedeuten entweder, daß das 7-Liter-Gefäß geleert oder daß das 11-Liter-Gefäß gefüllt wird.

Ist dies der kürzeste Lösungsweg? Nein; eine andere Möglichkeit wäre, zuerst das 7-Liter-Gefäß zu füllen. Dies wird gezeichnet, indem man mit dem Ball wieder beim Nullpunkt beginnt, ihn aber entlang der linken Seite der Tabelle bewegt. Führt man dies weiter fort bis der Ball den Punkt 2 berührt und notiert man alle Schritte, so erkennt man, daß der kleine Ballcomputer eine Lösung in 14 Schritten hervorbringt – dem Minimum.

Mit ein wenig Einfallsreichtum kann man für jede Aufgabe, bei der Flüssigkeiten umzuschütten sind, aber nur drei Gefäße zur Verfügung stehen, so einen kleinen Ballcomputer erfinden. Betrachten wir das älteste aller „drei-Gefäße-Probleme", das auf Nicola Fontana zurückgeht, einen italienischen Mathematiker des sechzehnten Jahrhunderts, der sich selbst Tartaglia („Der Stotterer") nannte. Ein 8-Liter-Gefäß sei mit Wasser gefüllt. Mit Hilfe zweier anderer Gefäße, die 5 bzw. 3 Liter fassen, sollen die 8 Liter zu gleichen Teilen auf die zwei größeren Gefäße verteilt werden. Das Schaubild zu dieser Aufgabe finden wir im Bild 22. Das 8-Liter-Gefäß wird durch eine Strecke dargestellt, die parallel zur Hauptdiagonale des Prallelogramms verläuft. Wie früher schon beginnt der Ball seinen Weg im Punkt *0*. Es ist einfach, den weiteren Weg zu verfolgen, der eine minimale Lösung von sieben Schritte ergibt.

Haben die zwei kleineren Gefäße keinen gemeinsamen Teiler und ist das dritte Gefäß größer oder gleich der Summe der beiden kleineren, so kann jede ganzzahlige Quantität zwischen 1 und der Kapazität des mittleren Gefäßes abgemessen werden. Man kann etwa mit Gefäßen der Fassungsvermögen 15, 16 und 31 Liter jede Quantität zwischen 1 und 16 messen. Dies ist jedoch nicht möglich, falls die beiden kleineren Gefäße einen gemeinsamen Teiler haben. In dem Schaubild für Gefäße von 4, 6 und 10 Litern wird der Ball nie eine ungerade Zahl berühren und mit 3-, 9- und 12-Liter-Gefäßen kann man daher nur 3, 6 und 9 Liter abmessen. (In beiden Fällen erhalten wir nur Vielfache des gemeinsamen Teilers.) Falls das größte Gefäß *kleiner* als die Summe der beiden anderen ist, ergeben sich weitere Einschränkungen. 7-, 9- und 12-Liter-Gefäße zum Beispiel erfordern, daß eine Ecke des Parallelogramms abgeschnitten wird (Bild 23). Der elastische Ball wird alle Mengen zwischen 1 und 9, ausgenommen 6, messen. Obwohl 7 und 9 keinen gemeinsamen Teiler haben, wird es durch die geringe Größe des dritten Gefäßes unmöglich, die Quantität 6 zu erhalten.

Ist das größte Gefäß *größer* als die Summe der beiden anderen, bleibt die Methode anwendbar. Vielleicht macht es dem Leser Spaß, sie auf folgende Variante zu Tartaglias Problem anzuwenden, wie sie von Sam Loyd auf Seite 304 seiner berühmten "Cyclopedia of Puzzles" gestellt wird. (Es ist eines der Rätsel, für die die Cyclopedia keine Lösung anbietet; vielleicht ist das eine Erklärung dafür, daß das Rätsel nie wieder gedruckt wurde.)

Einigen amerikanischen Soldaten gelang es, ein 10-Gallonen-Faß mit Bier zu „erobern". „Natürlich", schreibt Loyd, „kosteten sie", wobei sie einen 3- und einen 5-Gallonen-Behälter verwendeten. Den Rest des Bieres brachten sie, zu gleichen Teilen im Faß und in den anderen zwei Behältern aufgeteilt, in ihr Lager zurück. Wieviel hatten sie getrunken und wie haben sie den Rest in drei gleiche Teile (ungleich null) aufgeteilt? Die beste Lösung ist jene, die für das ganze Vorhaben mit der kleinsten Anzahl von Schritten auskommt. Bei jedem Schritt, auch beim Trinken, handelt es sich um eine ganzzahlige Menge von Gallonen und es wird angenommen, daß kein Bier verschüttet wird.

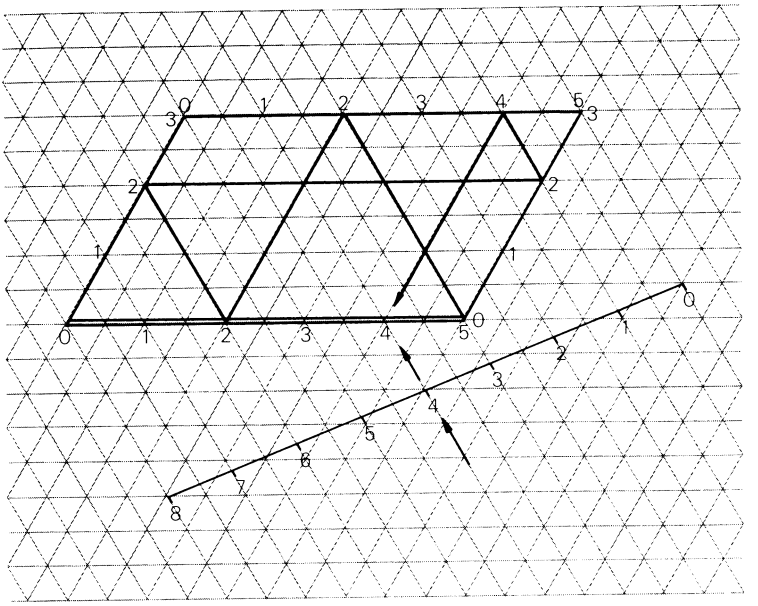


Bild 22 Schaubild zu Tartaglias Rätsel

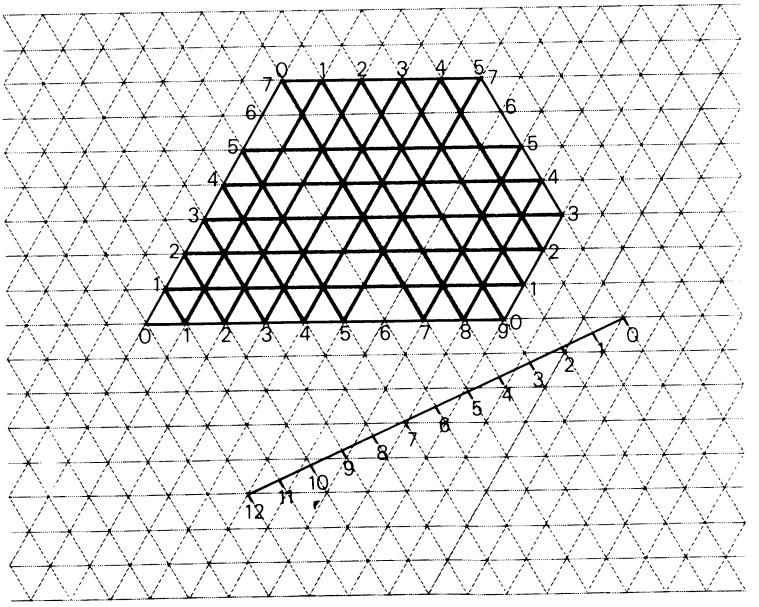


Bild 23 Schaubild für Gefäße mit den Volumina 7, 9 und 12

Vielleicht findet es der Leser auch interessant, mit Gefäßen verschiedener Größe zu experimentieren und dabei zu erforschen, was man mit dem Ballcomputer alles machen kann. Falls der interessierte Leser zu dieser Methode weitere Information wünscht, die auch Schaubilder in tetraedischer Form für vier Gefäße beinhaltet, sei er auf T. H. O'Beirnes Buch verwiesen, das im Literaturverzeichnis angeführt ist.

Ein anderes Ballproblem besteht im Auffinden eines geschlossenen Weges, entlang dessen ein Ball für immer innerhalb eines Polygons herumspringt, immer denselben Weg beschreibt und bei jedem Umlauf jede Seite des Vielecks genau einmal berührt. Solche Probleme können durch die vielseitige Methode der Spiegelreflexion gelöst werden. Das Quadrat liefert ein einfaches Beispiel. Bild 24 zeigt ein Quadrat, das nach drei verschiedenen Seiten gespiegelt wurde, und die mit Pfeilen versehene Strecke ist der einzige geschlossene Weg mit Teilstücken gleicher Länge. Wenn man die vier Quadrate zu einem Paket von Einheitsquadraten zusammenfaltet, dann verwandelt sich die gerade Strecke zu einem geschlossenen Weg.

An dieser Stelle erheben sich zwei interessante Fragen. Gibt es in den entsprechenden dreidimensionalen Figuren zu Quadrat und gleichseitigem Dreieck, dem Würfel und dem Tetraeder, ebenfalls geschlossene Wege mit gleichlangen Teilstücken? Als Ball stelle man sich ein ideales elastisches Teilchen vor (oder einen Lichtstrahl innerhalb eines Körpers mit Spiegelwänden), das sich im schwerelosen Zustand mit völlig geradliniger Bahn fortbewegt und in der üblichen Weise von einer Fläche reflektiert wird: mit gleichem Einfalls- und Ausfallwinkel in einer Ebene, die senkrecht zu der ist, auf die das Teilchen auftrifft. Der Ball darf während eines Umlaufs jede Seitenfläche nur ein Mal berühren und muß zwischen je zwei Berührungen dieselbe Entfernung zurücklegen. (Das Berühren einer Kante oder einer Ecke wird dahingehend interpretiert, daß keine der beiden Seitenflächen, die dort zusammenstoßen, berührt wurde; sonst könnte man das Problem für den Würfel durch einen Ball lösen, der sich zwischen zwei diagonal gegenüberliegenden Punkten hin und her bewegt.)

Warren Weaver hat in einem seiner zahlreichen Artikel über Lewis Carroll enthüllt, daß sich auch dieses Problem für den Würfel unter Carrolls unveröffentlichtem mathematischen Material befand. Es ist die Art von Problem, die den Erfinder runder Billardtische ansprechen könnte. Die Vorstellung, übrigens, innerhalb eines kubischen „Tisches" Billard zu spielen, ist nicht so weit hergeholt, wie es scheinen mag. Da es vielleicht schon in einigen Jahrzehnten große Raumstationen geben wird, bedarf es keiner großen prophetischen Gabe, eine Anzahl dreidimensionaler Sportarten vorauszusehen, die den Vorteil der Schwerelosigkeit ausnützen. Eine Art Billardspiel etwa, Pool, läßt sich leicht an einem rechteckigen Raum anpassen, dessen Wände, Boden und Decke gepolstert sind; in den Ecken sind Öffnungen und die von 1 bis 35 nummerierten Bälle werden anfangs in einer Tetraederformation angeordnet. Natürlich gäbe es da noch einige Schwierigkeiten zu überwinden. Der Luftwiderstand bietet eine viel geringere Reibung als die Filzoberfläche des Billardtisches. Würde der Tetraeder von einem schnellen Ball auseinandergerissen, stiege die Entropie sehr rasch. Auch wäre es schwierig, nicht in die Bahn der Bälle zu geraten, die in beliebige Richtungen herumfliegen, wie die Moleküle eines idealen Gases.

Aber nun zurück zu Carrolls Problem. Die Reflexionsmethode, die bei den Quadraten benützt wurde, läßt sich auch auf Würfel anwenden. Man benötigt fünf Spiegelungen und der Pfeil im Bild 25 zeigt den gewünschten Weg an. Es ist einer von vier Wegen

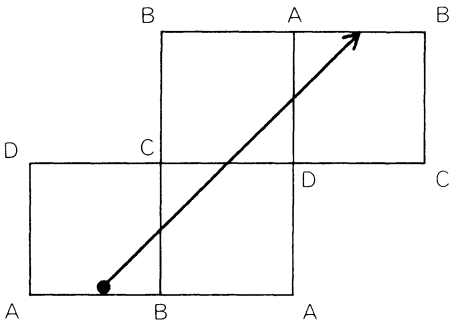
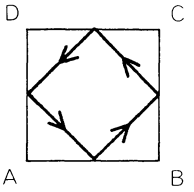


Bild 24

Weg aus gleichlangen Teilstücken in einem Quadrat



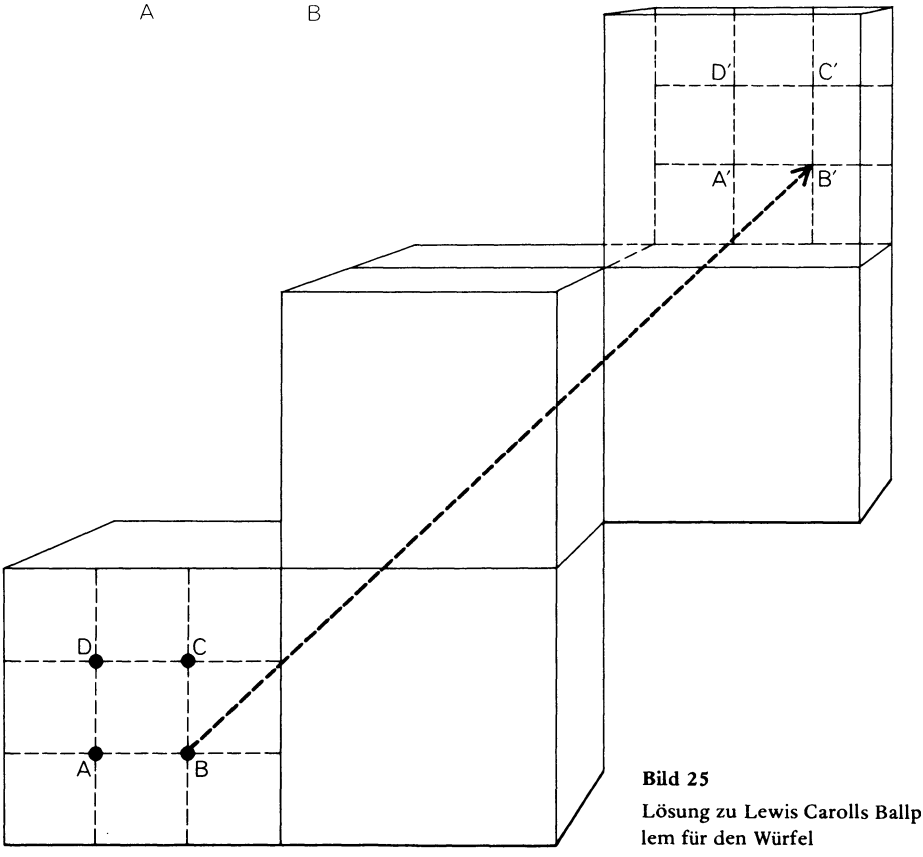


Bild 25

Lösung zu Lewis Carolls Ballproblem für den Würfel

gleicher Gestalt, die das Problem lösen. (Unterteilt man jede Seitenfläche des Würfels in neun kleinere Quadrate, so berührt der Weg jede Seitenfläche an einer Ecke des mittleren Quadrats.) Bild 26 zeigt ein Kartonmodell, das den Weg veranschaulicht, nachdem die sechs Würfel ineinander „gefaltet" wurden. Die Schnur wird fixiert, indem man eine Schleife durch ein kleines Loch schiebt und sie an der Außenseite durch ein Hölzchen festhält. Stellt man sich vor, daß der Würfel aus 27 kleineren Würfeln besteht, so erkennt man, daß jedes Teilstück des Weges zugleich Diagonale eines kleineren Würfels ist. Jedes Teilstück hat daher in einem Einheitswürfel die Länge $1/\sqrt{3}$. Die Gesamtlänge des Weges beträgt $2\sqrt{3}$.

Meines Wissens nach hat Hugo Steinhaus als erster diesen Weg gefunden. (Man vergleiche sein Buch "One Hundred Problems in Elementary Mathematics", New York: Basic Books, 1964, Problem 33. Dies ist eine Übersetzung der polnischen Ausgabe von 1958.) Die Lösung ist später von Roger Hayward wiederentdeckt worden, der sie im "Recreational Mathematics Magazine", Juni 1962 veröffentlichte. Die Form des Weges, schreibt er, ist in der organischen Chemie als „sesselförmiges Sechseck" bekannt. Es tritt häufig in Kohlenstoffverbindungen, wie dem Zyklohexan auf, in dem sechs einfach gebundene Kohlenstoffatome einen Ring bilden, an dem außen noch andere Atome angehängt sind. „Es ist bemerkenswert", schreibt B. M. Oliver von der Hewlitt-Packard Gesellschaft in Palo Alto, Kalifornien, „daß der Weg in allen Projektionen, die senkrecht zu einer Seitenfläche gemacht werden, als 1 x 2 Rechteck erscheint, in drei der isometrischen Projektionen des Würfels, die parallel zu einer Würfeldiagonale sind, als Rhombus und als regelmäßiges Sechseck in der vierten isometrischen Ansicht. Eine eigenartige Figur, aber es ist der Weg, dem der Ball folgt!"

Ein ähnlicher geschlossener Weg in einem Tetraeder wurde von John H. Conway und später unabhängig davon, im Jahr 1962 von Hayward entdeckt. Es ist einfach, ein Tetraeder dreimal zu spiegeln (Bild 27) und einen geschlossenen Weg zu finden, der jede Seitenfläche einmal berührt. Die Schwierigkeit liegt darin, einen geschlossenen Weg mit gleichlangen Teilstücken zu finden. Ein solcher wird durch die gestrichelte Strecke gezeigt. Es gibt drei derartige Wege, die alle gleich aussehen, und jede Seitenfläche des Körpers jeweils an einer Ecke eines kleinen gleichseitigen Dreiecks berühren, das sich in der Mitte der Seitenfläche befindet. Die Seitenlänge dieses kleinen Dreiecks beträgt genau ein Zehntel der Länge der Kante des Tetraeders, die 1 ist. Jedes Teilstück vom Weg des Balles hat die Länge $\sqrt{10}/10$, oder 0,31622777, und die Gesamtlänge des Weges beträgt demnach 1,2649.

Hayward fertigte ein nettes Acetatmodell an, in dem Nylonfäden den Weg des elastischen Balles (oder des Lichtstrahles) im Zustand nach dem „Ineinanderfalten" der vier Tetraeder darstellen (Bild 28). Hayward schnitt die Seitenflächen aus Acetatblättern aus und verband sie entlang der Kanten, nachdem er an den entsprechenden Stellen vier kleine Löcher gebohrt hatte. Bevor er die vierte Seitenfläche anklebte, zog er einen Faden durch die Löcher der drei anderen Seitenflächen und befestigte ihn mit Klebestreifen an der Außenseite. Die zwei losen Enden zog er durch das Loch der vierten Seitenfläche, die er dann entsprechend mit den drei anderen verband. Nachdem er den Faden gestrafft hatte, verschloß er jedes Loch mit einer Mischung aus Aceton und einem

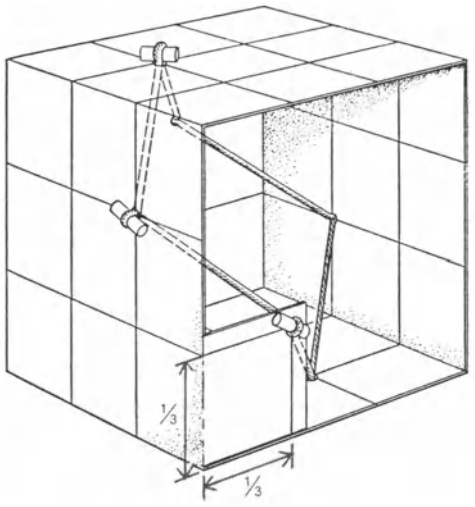


Bild 26
Modell, das den Weg innerhalb eines Würfels zeigt

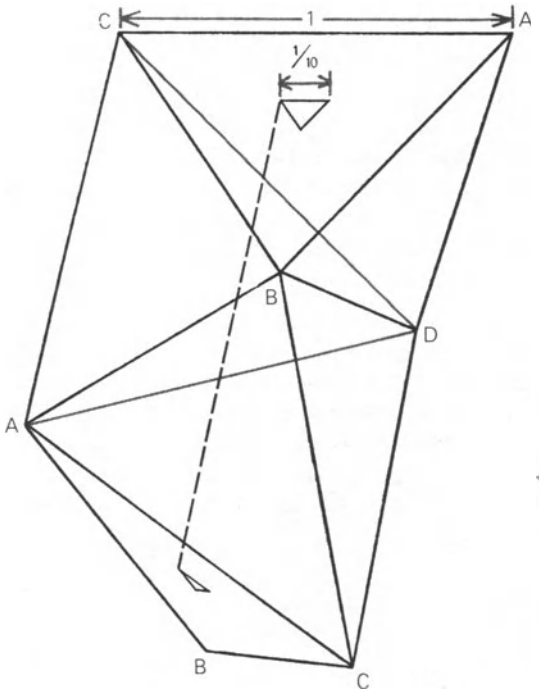


Bild 27 Lösung zum Ballproblem im Tetraeder

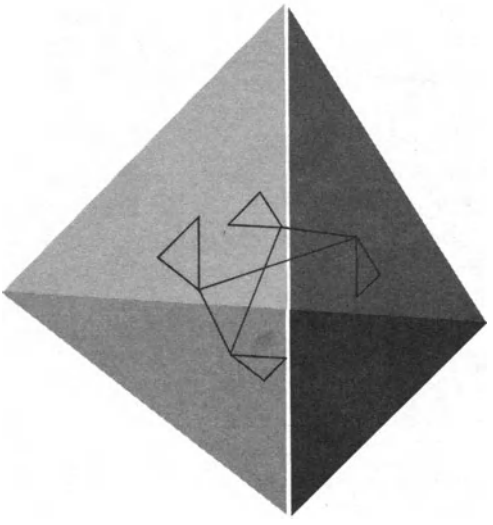


Bild 28 Acetatmodell eines Weges im Tetraeder

zementartigen Klebstoff und versäuberte die Enden und Schleifen des Fadens. Ein ähnliches Acetatmodell läßt sich für den Würfel anfertigen. In beiden Modellen kann man verschiedenfarbige Fäden benützen, um alle möglichen Wege zu zeigen.

Anhang

G. de Josselin de Jong aus Holland verallgemeinerte Lewis Carrolls Ballproblem für den Würfel auf Hyperwürfel aller höheren Dimensionen. 1963 schrieb er für mich seine Ergebnisse nieder, jedoch weiß ich nicht, ob er sie in der Zwischenzeit veröffentlicht hat. Die Länge des Weges ist durch die einfache Formel $2\sqrt{n}$ festgelegt, wobei n die Anzahl der Dimensionen ist. Der Weg des Balles in einem Hypereinheitswürfel vierter Dimension hat also genau die Länge von vier Einheiten. In allen höheren Dimensionen ist der Weg, wenn man von Drehungen und Spiegelungen absieht, eindeutig.

Lösungen

Gegeben ist ein 10-Gallonen-Faß gefüllt mit Bier und zwei Behälter, die drei bzw. fünf Gallonen fassen; wie kann man (in einer minimalen Anzahl von Schritten) einen Teil des Bieres trinken und den Rest zu gleichen Teilen (die ungleich null sind) auf die drei Gefäße verteilen? Da man mit den Gefäßen nur ganzzahlige Mengen messen kann, muß die Menge Bier, die zu dritteln bleibt, ein Vielfaches von drei sein: Also drei, sechs oder neun Gallonen. Die ersten zwei Beträge kann man ausschließen, da in beiden Fällen der Betrag kleiner ist als das Fassungsvermögen eines der Gefäße. (Nach jedem Umschütten muß immer ein Gefäß entweder leer oder voll sein. Keiner dieser beiden Fälle wäre erreicht, enthielte jedes Gefäß eine geringere Menge als sein Fassungsvermögen.) Wir schließen daher, daß eine Gallone getrunken wurde und neun zum Aufteilen übrigblieben.

Der Ballcomputer verfolgt einen minimalen Weg, der eine Gallone ergibt (Bild 29). Nachdem die eine Gallone (aus dem drei-Gallonen-Gefäß) getrunken worden ist, bleiben im Faß vier, im fünf-Gallonen-Behälter fünf Gallonen zurück. Das drei-Gallonen-Gefäß ist nun leer. Diese neue Situation wird im unteren Schaubild gezeigt. Der Ball muß nun einen Punkt erreichen, der für alle drei Gefäße drei Gallonen markiert. Der minimale Weg ist ausgezogen und zwei weitere Schritte sind gestrichelt eingezeichnet. Zählt man das Trinken der einen Gallone als einen Schritt, so benötigt man zu einer vollständigen Lösung neun Schritte, die neben den zwei Schaubildern gezeigt werden.

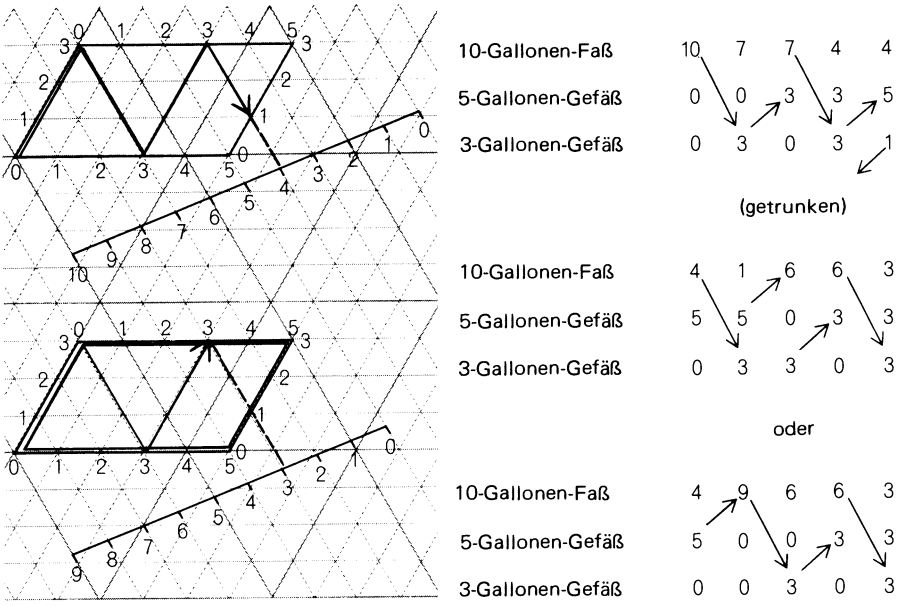


Bild 29 Lösung zu Sam Loyds Problem

5 Vier ungewöhnliche Brettspiele

In den sechziger Jahren stieg das Interesse an mathematischen Brettspielen beachtlich an. Heute werden die traditionellen Spiele, wie Schach, mehr als je zuvor gespielt und man experimentiert mit neuen Spielen, die immer wieder auf dem Markt angeboten werden. Immer mehr Mathematiker analysieren die Taktik solcher Spiele und immer mehr Computer werden zum Spielen programmiert. In diesem Kapitel werden wir vier sehr interessante, aber nur wenig bekannte Brettspiele vorstellen; zwei davon sind alt, zwei neu. Das Spielfeld kann man einfach auf Papier oder Karton zeichnen, die Spielregeln sind auch nicht kompliziert und jedermann wird viel Spaß daran haben.

Das Militärspiel, wie es in Frankreich genannt wird, ist ein hervorragendes Beispiel für ein Zweipersonenspiel, das extreme Einfachheit und außergewöhnliche strategische Feinheiten in sich vereinigt. Edouad Lucas zufolge, der das Spiel im dritten Band seiner bekannten „Récréation Mathématiques" (S. 105-116) beschreibt, war das Spiel in französischen Militärkreisen während und nach dem französisch russischen Krieg von 1870-1871 beliebt; in den führenden Büchern über Brettspiele wird es aber nicht einmal erwähnt.

Das Spielfeld für das Militärspiel zeigt Bild 30, in dem auch die einzelnen Positionen zur einfacheren Beschreibung gekennzeichnet sind. Der eine Spieler – wir wollen ihn Weiß nennen – hat drei Figuren, die zu Beginn die Positionen A, 1 und 3 einnehmen. Sein Gegner, Schwarz, hat nur eine Figur, die die Position 5 in der Mitte einnimmt. (Es können Schachfiguren oder auch Geldstücke verwendet werden.) Weiß beginnt und dann wird abwechselnd gezogen. Schwarz kann sich, entlang einer Verbindungslinie von einer Position zu einer benachbarten in jede Richtung bewegen. Weiß bewegt sich ähnlich, jedoch nur nach rechts, links oder vorne (also gerade aus oder diagonal), niemals nach hinten. Es wird nicht geschlagen. Weiß gewinnt, falls er Schwarz in eine Position drängt, in der dieser nicht mehr ziehen kann. Dies ist meistens dann der Fall, wenn Schwarz die Position B einnimmt, aber auch 4 und 6 sind möglich. In jedem anderen Fall gewinnt Schwarz. Er gewinnt, falls es ihm gelingt, hinter die „feindliche Linie" zu gelangen und es so für Weiß unmöglich wird, ihn einzusperren, oder falls die Situation eintritt, in der sich dieselben Züge unendlich oft wiederholen lassen.

Das Spiel ist einfach zu erlernen, bietet jedoch viel Spannung und ist schwierig zu analysieren. Lucas gelang es zu zeigen, daß Weiß immer gewinnen kann, falls er logisch richtig spielt, es gibt dafür jedoch keine einfache Strategie – immer wieder gibt es aber Fallen und Überraschungen. Der schlechteste Zug erweist sich oft als der beste. Ist Schwarz ein erfahrener Spieler gibt es keine Schwierigkeit, dem unerfahrenen Spieler Weiß zu entkommen.

Vergrößern wir nun die Freiheit von Schwarz, indem wir ihm erlauben, seine Figur zu Beginn des Spieles in *jeder* beliebigen Position aufzustellen, dann ergibt sich die Frage: Wer gewinnt nun, wenn beide logisch richtig spielen?

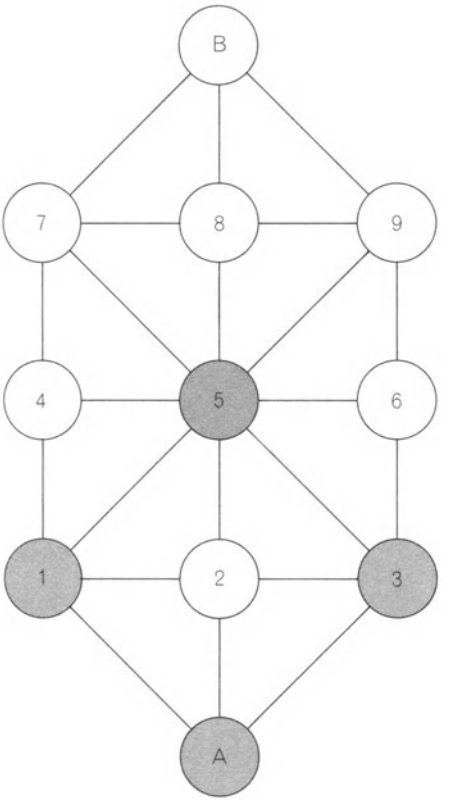


Bild 30
Das französische Militärspiel

Topologische Brettspiele, bei denen die Spieler selbst durch Züge auf dem Spielfeld Wege konstruieren, sind neuere Entwicklungen. In den letzten dreißig Jahren hat die Spielwarenindustrie viele Spiele dieser Art hervorgebracht. Im Jahr 1960 studierte William L. Black, der damals gerade in seinen ersten Studienjahren am Massachusetts Institute of Technology war, einige dieser Spiele, die auch ich schon in früheren Artikeln behandelt hatte. Das Resultat war ein neues topologisches Spiel, das seine Freunde Black nannten.

Obwohl man natürlich vorgefertigte Tafeln verwenden kann, läßt sich Black auch ganz einfach mit Bleistift und kariertem Papier spielen. Die Größe des Feldes kann beliebig gewählt werden. Das übliche acht-mal-acht Feld scheint ideal zu sein, aber das Spiel läßt sich einfacher an Hand eines vier-mal-vier Feldes erklären. Nachdem das Feld festgelegt worden ist, zeichnet der erste Spieler in dem Quadrat in der linken oberen Ecke ein Kreuz ein (Bild 31). Der zweite Spieler führt den Weg weiter, indem er eines der drei erlaubten Zeichen in einem an das erste Quadrat angrenzende Feld einzeichnet. Die drei erlaubten Zeichen, die unterhalb der Spielfelder angegeben sind, bestehen aus je

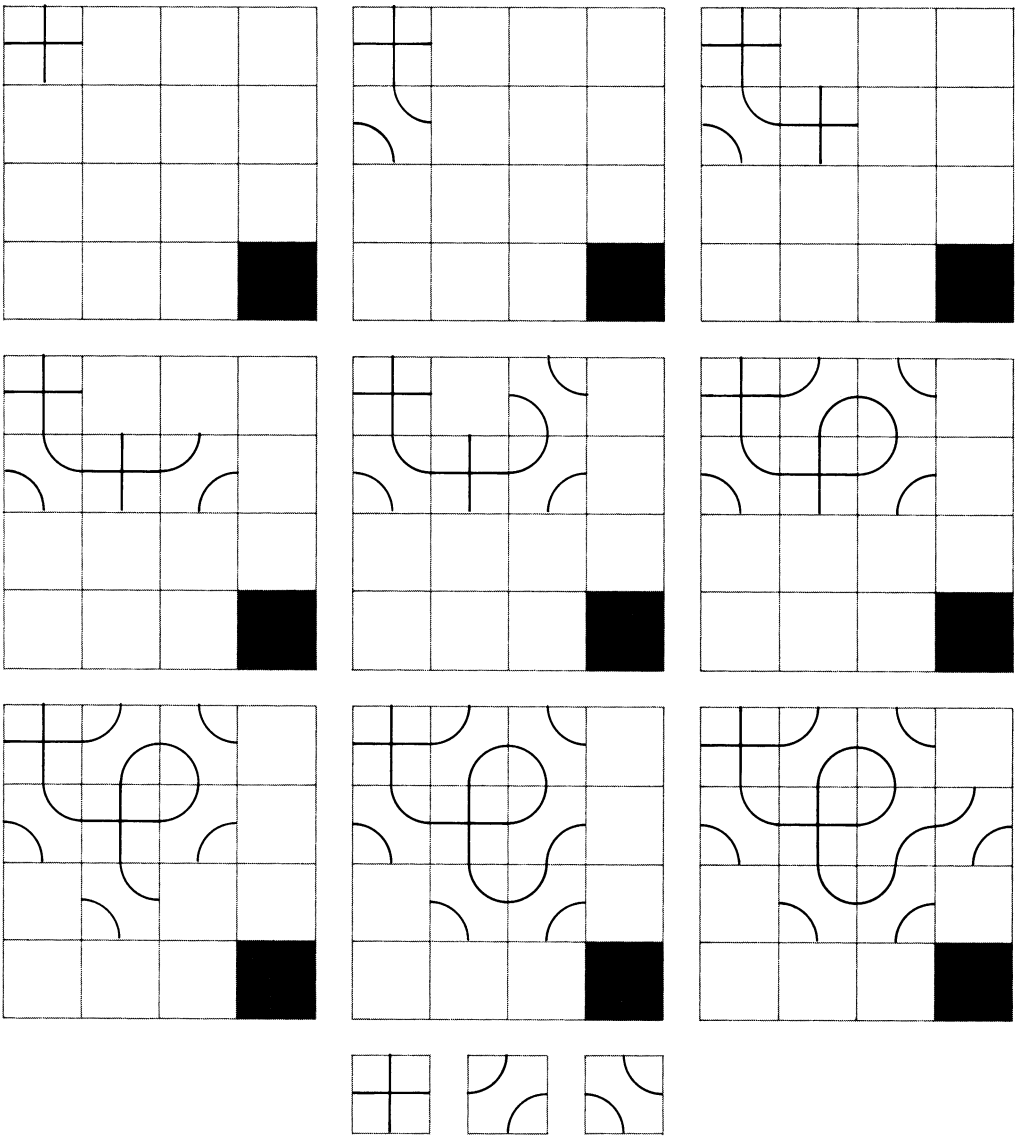


Bild 31 William L. Blacks Spiel

zwei Teilen. Eine Linie steht für eine der drei Möglichkeiten wie man den Weg an einer offenen Seite eines Quadrates fortsetzen kann; die zweite wurde hinzugefügt um für die zwei restlichen Seiten eine Fortsetzungsmöglichkeit zu schaffen.

Die Spieler sind abwechselnd an der Reihe. Durch jeden Zug muß der Weg in ein angrenzendes Quadrat hin erweitert werden. Jeder Spieler versucht zu vermeiden, daß er den Weg zur Grenze des Spielfeldes hinführt. Wird er dazu gezwungen, verliert er das Spiel. Gewinner ist derjenige, dem es gelingt, den Weg in das Feld der rechten unteren Ecke (nicht nur an dessen Begrenzung) fortzusetzen (im Bild dunkler getönt). Bild 31 zeigt die aufeinanderfolgenden Züge eines typischen kurzen Spieles. Der erste Spieler gewinnt, weil er seinen Gegner zwingt, im obersten rechten Feld zu spielen, in dem jedes Zeichen den Weg an die Grenze des Spielfeldes heranführt. (Es ist bemerkenswert, daß durch das Kreuz der Weg nur entlang eines seiner Arme verlängert wird, obwohl im Verlauf des Spiels auch der andere Arm noch in den Weg integriert werden kann.)

Blacks Spiel ist auch deshalb besonders interessant, weil bald nach seiner Entstehung Elwyn R. Berlekamp, ein Freund Blacks, eine elegante Strategie fand, die einem der beiden Spieler den Sieg garantiert. Kennt man einmal diese Strategie, erlischt das Interesse am Spiel selbst schnell; deshalb rate ich Ihnen dringend zu versuchen, Berlekamps Idee selbst zu erarbeiten, bevor sie im Lösungsteil nachschauen.

Von den vielen mittelalterlichen Brettspielen ist eines der besten anscheinend zuerst in Skandinavien gespielt worden, und zwar schon im vierten und fünften Jahrhundert. Damals wurde es *tafl* genannt. In späteren Jahrhunderten war es als *hnefatafl* bekannt. Die Normannen führten das Spiel in England ein, wo es das einzige Brettspiel war, das von den Sachsen gespielt wurde, bis es im elften und zwölften Jahrhundert durch Schach ersetzt wurde. In seinem Buch "History of Board-Games Other Than Chess" führt H. J. R. Murray Gründe an, denen zufolge es im Wesentlichen jenem Spiel gleicht, das im sechzehnten Jahrhundert noch in Wales, wo man es *tawlbwrrd* nannte, und im achtzehnten Jahrhundert in Lappland, wo man es als *tablut* kannte, gespielt wurde. Murray entdeckte auch, daß das ausführliche Tagebuch des großen schwedischen Botanikers Carolus Linnaeus, das dieser während einer Forschungsreise in Lappland im Jahr 1732 führte, eine vollständige Beschreibung von *tablut* enthält. Eine Übersetzung ins Englische von Sir James Edward Smith ist 1811 in London unter dem Titel "Lachesis Lapponica: or a Tour of Lapland" veröffentlicht worden. Bild 32 ist eine Wiedergabe eines *tablut* Brettes.

Die weißen Figuren stellen hellhaarige Schweden dar und zwar einen König und acht Krieger. Die schwarzen Figuren, 16 an der Zahl, stellen russische Krieger dar. (Es ist praktisch, einen weißen König und 8 weiße Bauern vom Schach für die Schweden zu verwenden. Als Russen kann man schwarze Schachfiguren nehmen, es müssen aber alle als gleichwertig angesehen werden.) Jede schwarze und jede weiße Figur, einschließlich des Königs, kann sich wie der Turm im Schachspiel bewegen, d. h., sie kann sich über eine beliebige Anzahl freier Felder in gerader Richtung, parallel zu einer Seite des Spielfeldes bewegen.

Zu Beginn des Spiels steht der schwedische König auf dem mittleren Feld, das auch als Schloß bezeichnet wird. Nur der König darf sich auf diesem Feld aufhalten, alle anderen Figuren aber dürfen es, wenn es leersteht, überqueren. Rund um den König

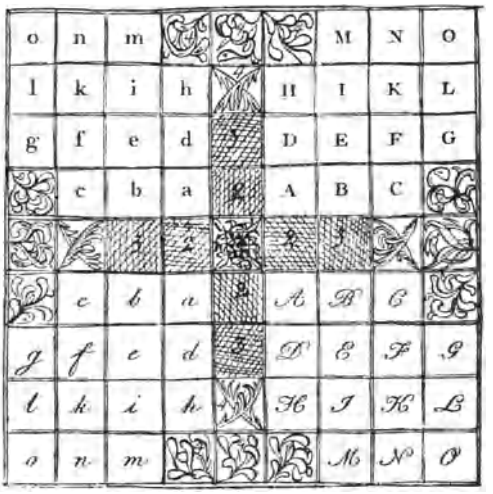


Bild 32 Das Spiel *tablut*

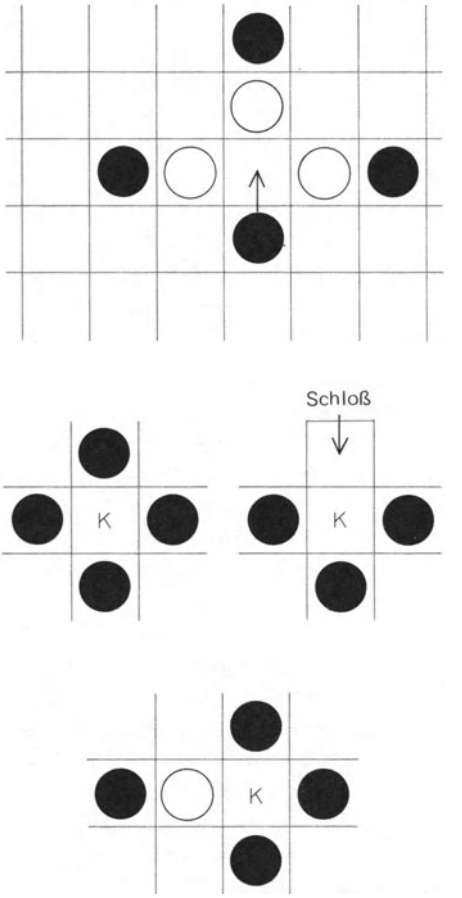


Bild 33 Wie man im *tablut* schlägt

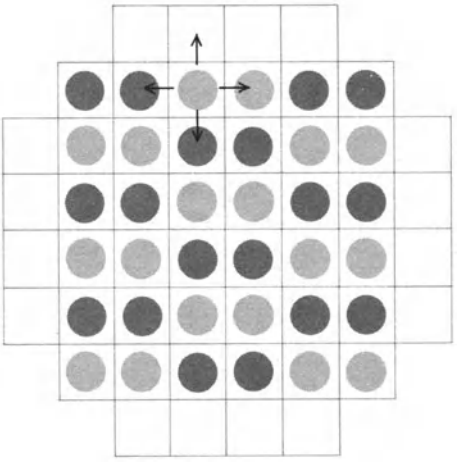


Bild 34
Sidney Sacksons Spiel Fokus

sind die acht Krieger in den 8 schattierten Feldern aufgestellt. Die russischen Krieger nehmen jene 16 verzierten Felder ein, die sich an den vier Seiten des Spielfeldes befinden.

Jeder Spieler kann das Spiel eröffnen. Feindliche Figuren können durch einen Zangenzug geschlagen werden, also indem man auf den gegenüberliegenden Seiten einer Figur die angrenzenden Felder besetzt und die drei Figuren eine Reihe oder Spalte bilden. Führt zum Beispiel Schwarz den in Bild 33 oben angedeuteten Zug durch, so schlägt er drei weiße Figuren gleichzeitig. Wandert eine Figur zwischen zwei feindliche hinein, so wird sie dadurch nicht geschlagen. Der König kann sich am Schlagen feindlicher Figuren beteiligen, er selbst jedoch ist nur dann geschlagen, wenn er entweder an allen vier Seiten durch feindliche Figuren umgeben ist, oder durch drei feindliche Figuren und das Schloß (Bild 33, Mitte); bewegt er sich aus seinem Schloß heraus in eine solche Stellung gilt er auch als geschlagen.

Linnaeus fügt noch hinzu, daß, falls der schwedische König in seinem Schloß von drei feindlichen und einem eigenen Mann umgeben ist, dieser Schwede geschlagen wird, wenn ein Russe auf dem Feld zu stehen kommt, das an diesen Schweden grenzt und dem König gegenüberliegt (Bild 33, unten).

Das Ziel von Schwarz ist es, den König zu schlagen. Gelingt dies, gewinnen die Russen. Weiß versucht, dem König zu ermöglichen das Land zu verlassen, d. h. ein Feld am Rand des Spielfeldes zu erreichen. Immer, wann ein durchgehender Weg entlang einer Reihe oder Spalte auftritt, auf dem der König die Grenze erreichen könnte, muß Weiß die Russen durch das Wort „Raichi!" warnen. (Diese Bemerkung ist in ihrer Funktion ähnlich zur Warnung „Schach"!) Sind zwei solche Wege vorhanden, muß Weiß „Tuichu!" ausrufen. Natürlich kündigt „Tuichu" einen Sieg für Weiß an, da Schwarz ja keine Möglichkeit hat, beide Wege in einem Zug zu versperren.

Ein New Yorker Techniker, Sidney Sackson, dessen Hobby es ist, Brettspiele zu sammeln, kann sich nur an eine Gelegenheit erinnern, zu der *tablut* in den Vereinigten Staaten hergestellt und verkauft worden ist. Im Jahr 1863 kam es als Bürgerkriegsspiel heraus und wurde „Freiheitskampf" oder „Kampf für die Union" genannt. Dieses Spiel ist mit *tablut* identisch, außer daß der König „Rebellenhäuptling" genannt wird und die Figuren „Aufständische" und „Soldaten der Union" sind. Der Rebellenhäuptling darf sich bei einem Zug höchstens über vier Felder hin bewegen. Das traditionelle Spiel scheint Weiß zu begünstigen und so ist vielleicht deshalb diese Einschränkung eingeführt worden, um das Gleichgewicht wieder herzustellen. („*Breakthru*", ein von der Minnesota Mining and Manufacturing Company kürzlich angebotenes Spiel basiert auf *tablut*.)

Sackson ist selbst der Erfinder vieler ungewöhnlicher Brettspiele; eines der besten nannte er Fokus. Es wird mit 36 Spielmarken gespielt, von denen je eine Hälfte eine eigene Farbe hat. Kleine Pokermarken eignen sich beispielsweise ausgezeichnet dafür. Zu Beginn werden sie auf einem acht-mal-acht Brett aufgestellt, von dem an jeder Ecke drei Felder entfernt wurden. Bild 34 zeigt, wie die Marken angeordnet werden.

Irgendeine Seite beginnt. Ein Zug besteht darin, einen Stoß Marken (am Anfang sind alle Stöße nur eine Marke hoch) so viele Felder weiterzurücken, wie Marken im Stoß sind. Es sind nur horizontale und vertikale, aber keine diagonalen Züge erlaubt. Die vier Möglichkeiten für den ersten Zug einer schwarzen Marke werden im Bild 34

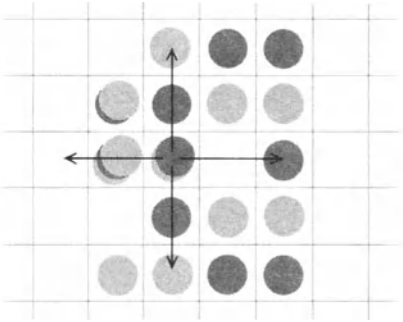


Bild 35
Züge beim Spiel Fokus

gezeigt. Bewegt man die Marke nach oben, landet sie auf einem leeren Feld, rechts kommt sie auf einer anderen schwarzen Marke zu liegen, links und unten auf einer grauen. Die letzten drei genannten Züge ergeben jeweils Stöße der Höhe zwei. Diese können nun in jeder beliebigen Richtung um zwei Felder verschoben werden. Stöße zu drei, vier oder fünf Marken kann man drei, vier beziehungsweise fünf Felder weit bewegen. Ein Stoß gehört demjenigen Spieler, dessen Marke oben auf liegt. Bei den Zügen ist es egal, ob die übersprungenen Felder leer oder von Stößen eines der beiden Spieler besetzt sind. Übersprungenen Marken geschieht nichts. Ein Zug kann auf einem leeren Feld oder auf einem anderen Stoß enden. Bild 35 zeigt alle möglichen Züge für einen Stoß der Höhe zwei.

Ein Stoß darf nicht mehr als fünf Marken umfassen. Falls ein Zug einen Stoß von mehr als fünf Marken ergibt, werden die überzähligen von unten weggenommen; gehören sie dem Gegner, werden sie als geschlagen betrachtet und vom Spiel entfernt. Gehören sie dem Spieler, der den Zug gemacht hat, werden sie zur Seite gelegt und dienen als Reserve. Zu jedem Zeitpunkt des Spiels kann ein Spieler eine seiner Reservemarken nehmen und sie auf irgendein Feld legen, sei dieses leer oder nicht. Dies hat dieselbe Wirkung wie ein regulärer Zug: Legt der Spieler die Marke auf einen Stoß, so gehört ihm dieser. Das Verwenden der Reservemarke ersetzt einen Zug am Brett.

Der Spieler kann auch einen kürzeren Zug ausführen, als die Anzahl der Marken in dem Stoß beträgt, mit dem er zieht. In diesem Fall nimmt er von dem Stoß eben so viele Marken von *oben* weg, wie er Felder zu ziehen wünscht. Der Rest bleibt auf dem Feld zurück. So kann zum Beispiel ein Spieler von einem Stoß der Höhe fünf drei Marken wegnehmen und damit drei Felder weiterrücken. Der *zurückbleibende* Stoß gehört demjenigen Spieler, dessen Marke nun zuoberst liegt. Kann ein Spieler nicht mehr ziehen (d. h., ihm gehören keine Stöße mehr und er hat keine Reservemarken), dann ist das Spiel zu Ende und sein Gegner hat gewonnen.

Eine zusätzliche Regel ist noch nötig. Paul Yearout, ein Mathematiker an der Universität Brigham Young, wies darauf hin, daß der zweite Spieler immer noch einen Zug machen kann, wenn er symmetrisch spielt; das heißt, daß er nach jedem Zug des

ersten Spielers diesen durch einen symmetrisch entgegengesetzten beantwortet. Um dies zu verhindern, schlägt Sackson eine der folgenden Möglichkeiten vor:

Ein solcher Zug bedeutet Sieg für den ersten Spieler;

Vor Beginn des Spieles tauscht jeder Spieler eine seiner Marken mit einer des Gegners aus (der zweite Spieler muß aber so austauschen, daß die entstandene Asymmetrie erhalten bleibt) und dann nimmt das Spiel seinen normalen Verlauf.

Fokur wurde im Jahr 1965 als erstes von Sacksons Spielen von der Whitman Publishing Company auf den Markt gebracht. Für eine genauere Beschreibung und strategische Anweisungen vergleiche man Sackson "Gamut of Games", S. 125-134.

Lösungen

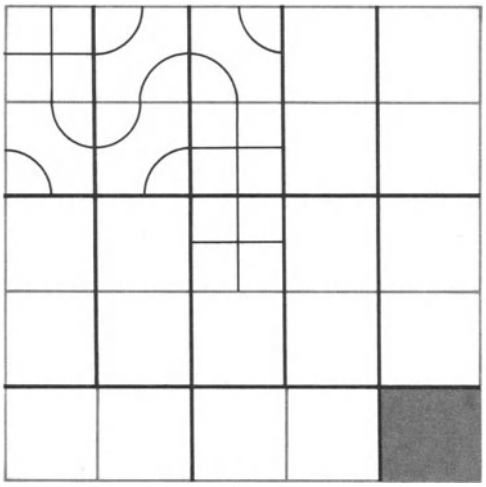
Welche Seite gewinnt, wenn man im französischen Militärspiel Schwarz den Vorteil gewährt, seine Figur zu Beginn an eine beliebige Stelle setzen zu können? Diese Frage wurde erstmals von dem holländischen Mathematiker Fredrik Schuh in seinem Buch „Wonderlijke Problemen" gelöst, das 1943 in Holland verlegt wurde. Weiß kann Schwarz immer gefangen nehmen, falls er logisch richtig spielt. Wir können hier keine vollständige Analyse anbieten, aber die folgende Übersicht bringt die zum Sieg führenden Züge von Weiß für sechs verschiedene Eröffnungen von Schwarz.

Schwarz	Weiß
2	A 3 5
4 (oder 6)	A 1 5 (oder A 3 5)
5	1 2 3
7 (oder 9)	A 1 5 (oder A 3 5)
8	A 1 5
B	1 2 3

Eine vollständige Beschreibung findet man in F. Gobels Übersetzung von Schuhs Buch, "The Master Book of Mathematical Recreations", hrsg. von T. H. O'Beirne (New York: Dover, 1968, S. 239-244). Schuh bespricht auch einige Varianten des Spieles. Für einen guten Vorschlag zu einem Computerprogramm für dieses Spiel siehe Donald E. Knuths "Fundamental Algorithms" (New York: Addison-Wesley, 1968, S. 546). Richard Sites, ein Computerfachmann an der Universität Stanford bewies 1970, daß Weiß Schwarz immer im zentralen Feld einsperren kann, unabhängig davon, wo Schwarz beginnt.

Das topologische Spiel von Black wird bei einem quadratischen Spielfeld immer vom ersten Spieler gewonnen, falls die Gesamtanzahl der Felder ungerade ist, vom zweiten Spieler, falls sie gerade ist.

Spielt man auf einem Spielfeld mit einer ungeraden Anzahl von Feldern, etwa auf einem fünf-mal-fünf Brett, dann muß sich der erste Spieler die gesamte Fläche, ausgenommen das Feld in der unteren rechten Ecke, mit Dominosteinen bedeckt vorstellen (Bild 36). Wie die Dominosteine angeordnet sind ist egal.



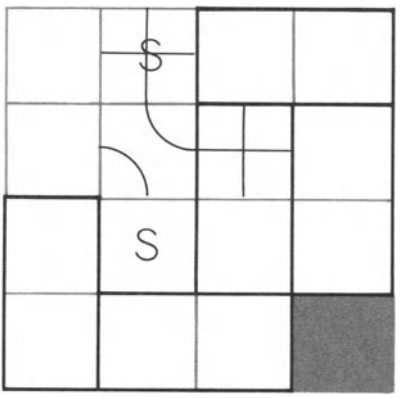
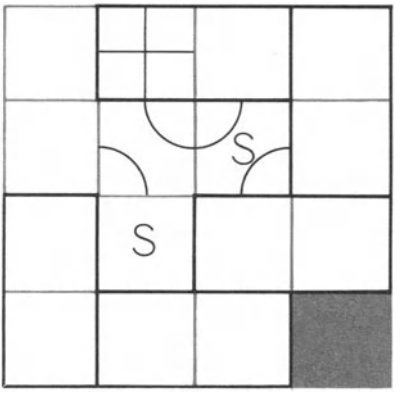


Bild 36 Anleitung zu Black auf einem fünf-mal-fünf Brett



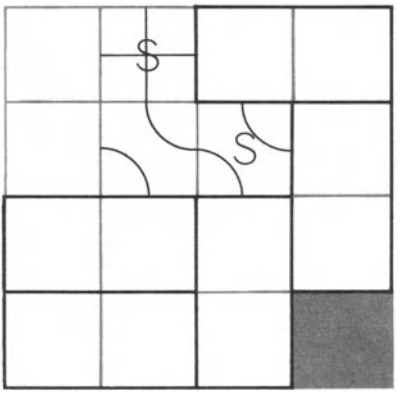


Bild 37
Anleitung zu Black auf einem vier-mal-vier Brett

Jeder Zug des zweiten Spielers setzt den Weg auf einen neuen Dominostein fort. Der erste Spieler muß dann so weiterspielen, daß der Weg *auf diesem Dominostein bleibt*. Dies zwingt den zweiten Spieler, den Weg wieder auf einem neuen Dominostein fortzusetzen. Es ist offensichtlich, daß der zweite Spieler schließlich einmal gezwungen ist, den Weg an die Grenze des Spielbrettes oder zu einer Begrenzungslinie des unteren rechten Feldes hinzuführen.

Die Taktik, mit der der zweite Spieler auf Spielflächen mit einer geraden Anzahl von Feldern gewinnt, ist etwas komplizierter. Man stellt sich dazu vor, daß das Spielfeld mit Ausnahme des oberen linken und des unteren rechten Eckfeldes von Dominosteinen bedeckt sei. Da die zwei unbedeckten Felder aber von der gleichen Farbe sind (wenn man sich das Spielfeld als Schachbrett vorstellt), können natürlich die übrigen Felder nicht vollständig mit Dominosteinen bedeckt werden. Es wird immer zwei unbedeckte Felder der gleichen Farbe geben. Elwyn R. Berlekamp, der dieses Spiel knackte, nennt diese zwei unbedeckten Felder einen „gespaltenen Dominostein". Dieser gespaltene Dominostein wird auf folgende kluge Weise umgangen: Der zweite Spieler macht seinen ersten Zug so, wie man es im Bild 37, oben, sieht. Dies zwingt den ersten Spieler, in das zweite Feld der Hauptdiagonale vorzurücken; die drei ihm zur Verfügung stehenden Möglichkeiten werden gezeigt. In jedem Fall wird die im Weg nicht integrierte, also unbenützte Linie, zwei Felder gleicher Farbe verbinden. Diese zwei Felder, die in der Zeichnung mit S gekennzeichnet sind, werden als der gespaltene Dominostein betrachtet. Die übrigen Felder (mit Ausnahme des unteren rechten Eckfeldes) können nun vollständig mit Dominosteinen bedeckt werden, deren Anordnung wiederum beliebig ist. Der zweite Spieler gewinnt nun nach der vorher beschriebenen Dominomethode.

6 Das starre Quadrat und acht andere Probleme

1 Das starre Quadrat

Raphael M. Robinson, ein Mathematiker an der Universität von Kalifornien in Berkeley, ist weltweit für seine Lösung einer berühmten Minimaufgabe aus der Mengenlehre bekannt. Im Jahr 1924 verblüfften Stefan Banach und Alfred Tarski ihre Kollegen auf folgende Weise: Sie zeigten, daß man eine massive Kugel so in eine endliche Anzahl von Teilmengen zerlegen kann, daß sich diese (ohne die feste Gestalt dieser Teile zu verändern) zu zwei massiven Kugeln derselben Größe wie die ursprüngliche zusammensetzen lassen. Die minimale Anzahl von Teilmengen, die man zum „Banach-Tarski-Paradoxon" benötigt, wurde erst 20 Jahre später herausgefunden, als Robinson in einem eleganten Beispiel zeigte, daß fünf ausreichend seien. (Mißachtet man den isolierten Punkt im Zentrum der Kugel, kommt man schon mit vier Teilmengen aus!)

Hier wollen wir eine etwas weniger wichtige, aber dafür unterhaltsamere Minimaufgabe stellen. Diese ungewöhnliche Aufgabe ist erst kürzlich von Robinson gefunden worden und ist bis jetzt noch nicht gelöst. Man hat einen unbegrenzten Vorrat an Zündhölzern der gleichen Länge zur Verfügung. Diese können nur an ihren Enden miteinander verbunden werden. Formt man aus drei Hölzchen ein Dreieck, so ist dieses starr, aber ein Quadrat aus vier Hölzchen ist es nicht: Dieses läßt sich leicht zu anderen Gestalten umformen, ohne daß dabei ein Hölzchen geknickt oder abgebrochen oder eine Verbindung gelöst wird. Der einfachste Weg, das Quadrat so zu verstreben, daß es nicht mehr verformbar ist, besteht darin, acht weitere Hölzchen derart zu befestigen, daß sie das Skelett eines regelmäßigen, starren Oktaeders bilden (Bild 38).

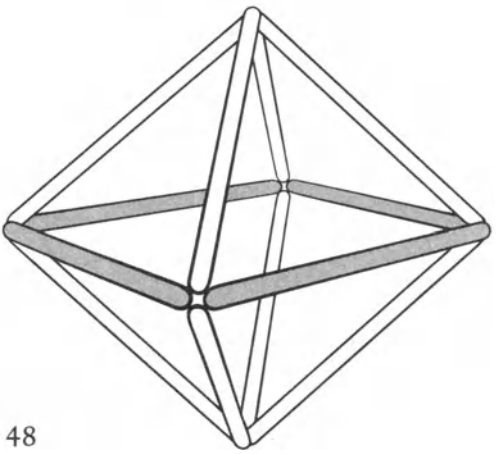


Bild 38
Verstrebung eines Quadrates im Dreidimensionalen

Nun wollen wir uns aber auf die Ebene beschränken. Gibt es auch hier eine Möglichkeit, durch Hinzufügen von Hölzchen, die nur an den Enden verbunden sind, das Quadrat völlig starr zu machen? Alle Hölzchen müssen natürlich ganz flach aufliegen. Sie dürfen sich nicht überkreuzen oder auf irgendeine Art geknickt oder gebrochen werden. Die Antwort ist ja; das Quadrat *läßt* sich starr machen. Wie groß ist nun die minimale Anzahl von Hölzchen, die man dazu benötigt?

2 Eine Wette

Der Mathematikstudent Bill und sein Freund John, dessen Hauptfach Englisch war, warfen an der Bar meist eine Münze, um zu entscheiden, wer die nächste Runde Bier zu zahlen hatte. Eines Abends sagte Bill: „Da ich die letzten drei Mal gewonnen habe, will ich dir einen Vorsprung geben. Du wirfst *zwei* Münzen und ich nur eine. Erreichst du mehr Köpfe als ich, gewinnst du, im anderen Fall ich."

„Vielen Dank", antwortete John.

In den vorhergehenden Runden, als nur eine Münze geworfen wurde, war für John die Wahrscheinlichkeit zu siegen natürlich 1/2. Wie stehen seine Chancen unter den neuen Bedingungen?

3 Ein dreidimensionales Labyrinth

Dreidimensionale Labyrinthe haben Seltenheitswert. Manchmal werden sie von Psychologen verwendet, um Lernvorgänge bei Tieren zu erforschen und gelegentlich bringt die Spielwarenindustrie sie als Rätsel auf den Markt. Ein zweistöckiges Labyrinth, durch das man eine Murmel rollen lassen kann, wurde in London schon um 1890 verkauft; es ist in "Puzzles Old an New" (London, 1938) von „Professor Hoffmann" vorgestellt. Heute kann man in den Vereinigten Staaten ein sehr ähnliches, würfelförmiges Labyrinth kaufen. Im Grunde ist es ein Würfel aus durchsichtigem Kunststoff, der durch ebenfalls durchsichtige Wände in 64 kleinere Würfel unterteilt ist. Da einige Seitenflächen der kleineren Würfel entfernt wurden, entsteht ein Labyrinth, durch das man eine Kugel rollen kann. Dies ist ein einfaches, leicht lösbares Labyrinth.

Robert Abbott, der Verfasser von "Abbott's New Card Games" (New York: Stein and Day, 1963) stellte sich vor kurzer Zeit folgende Frage: Wie schwierig kann man ein vier-mal-vier-mal-vier Raumlabyrinth eigentlich machen, wenn man nach obiger Bauweise vorgeht? Der Leser soll nun nicht ein Modell anfertigen, sondern herausfinden, wie schnell er den Weg durch das Labyrinth findet, ohne ein Modell zu haben.

In jeder der vier Etagen, im linken Teil der Zeichnung, stehen dicke schwarze Linien für Seitenwände. Rasterung bedeutet, daß die Bodenfläche vorhanden ist, keine Rasterung das Gegenteil. Eine kleine quadratische Zelle, die an allen vier Seiten von schwarzen Linien umgeben und nicht gerastert ist, bedeutet daher ein würfelförmiges Abteil, das zwar nach den vier Seiten hin begrenzt, nach unten aber offen ist. Um heraus-

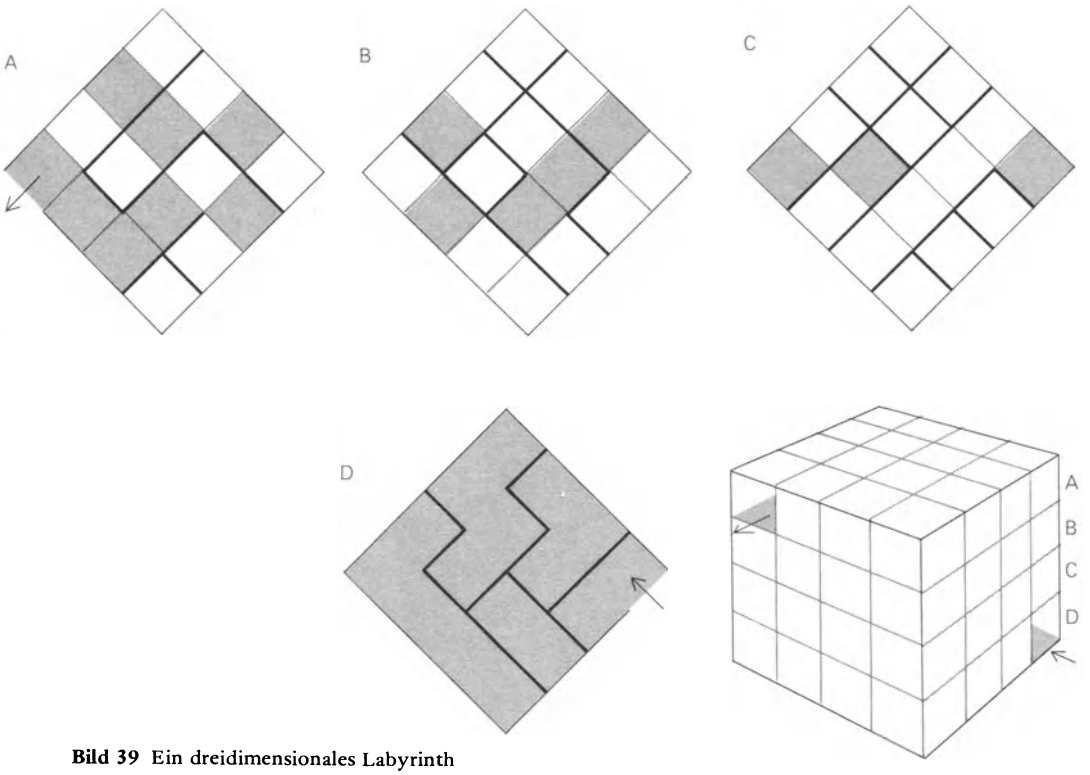


Bild 39 Ein dreidimensionales Labyrinth

zufinden, ob es nach oben hin abgeschlossen ist oder nicht, muß man die entsprechende Zelle der nächsthöheren Etage betrachten. Die oberste Ebene (*A*) ist nach oben hin natürlich vollständig abgeschlossen.

Die Diagramme *A* bis *D* muß man sich als Pläne der vier Etagen des würfelförmigen Gefüges vorstellen, das im rechten Teil der Zeichnung abgebildet ist. Zuerst soll man versuchen, einen Weg zu finden, der vom Eingang der ersten Ebene zum Ausgang in der obersten Etage führt. Weiterhin soll man versuchen, den kürzesten Weg dieser Art zu finden.

4 Goldene Kettenglieder

Lenox R. Lohr, der Direktor des Museums für Naturwissenschaften und Industrie in Chicago, hat uns freundlicherweise die folgende, täuschend einfache Version einer Art von kombinatorischem Problem zukommen lassen, das in vielen Gebieten der angewandten Mathematik auftaucht. Ein Reisender befindet sich in einer fremden Stadt und hat kein Geld zur Verfügung. Innerhalb der nächsten Tage erwartet er jedoch eine

größere Summe. Sein wertvollster Besitz ist eine goldene Uhrkette, die aus 23 Gliedern besteht. Als Bezahlung für ein Zimmer vereinbart er mit der Wirtin, ihr als zusätzliche Bürgschaft 23 Tage lang jeden Tag ein Glied zu geben.

Der Reisende möchte natürlich seine Uhrkette so wenig wie möglich beschädigen. Anstatt der Wirtin jeden Tag ein Glied zu geben, kann er ihr am ersten Tag ein Glied geben, dies am zweiten Tag wieder zurücknehmen und ihr dafür eine zweigliedrige Kette geben. Am dritten Tag kann er ihr das einzelne Glied wieder geben, am vierten Tag alles zurücknehmen und ihr eine viergliedrige Kette geben. Worauf es ankommt ist nur, daß die Wirtin an jedem Tag eine der Anzahl der vergangenen Tage entsprechende Zahl von Gliedern besitzt.

Der Reisende bemerkt bald, daß er, um dies zu erreichen, die Kette auf viele verschiedene Arten zerteilen kann. Die Fragestellung ist nun folgende: Wie groß ist die minimale Anzahl von Gliedern, die der Reisende teilen muß, um seine Abmachung 23 Tage hindurch zu erfüllen? Fortgeschrittenere Mathematiker wollen vielleicht noch die allgemeine Formel für die längste Kette finden, die so verwendet werden kann, nachdem n Schnitte an den geeignetsten Stellen durchgeführt worden sind.

5 Magische Wortquadrate

Freunde von Buchstabenrätseln werden schon seit langer Zeit von einer Rätselart fasziniert, die Wortquadrat genannt wird. Die Erklärung geschieht am besten durch ein Beispiel, dieses und weitere Beispiele sind einer Übersetzung nicht zugänglich und werden daher englisch angeführt.

M E R G E R S
E T E R N A L
R E G A T T A
G R A V I T Y
E N T I T L E
R A T T L E R
S L A Y E R S

Man muß beachten, daß im obigen Quadrat der Ordnung 7 jedes Wort sowohl horizontal als auch vertikal auftritt. Je höher die Ordnung, desto schwieriger ist so ein Quadrat zu finden. Einigen Experten ist es gelungen, viele elegante Wortquadrate der Ordnung 9 zu formen, aber es konnte im Englischen noch kein Wortquadrat der Ordnung 10 gefunden werden, in dem nicht so ausgefallene Worte wie Pango-Pango vorkamen.

Charles Babbage, der sich schon im neunzehnten Jahrhundert mit Computern beschäftigte, erklärte in seiner Autobiographie "Passage from the Life of a Philosopher" wie man Wortquadrate bilden kann und fügt hinzu: „Die verschiedenen kirchlichen Würdenträger lassen sich leicht in Quadrate anordnen; aber es wird behauptet, und ich weiß nicht, von wem es stammt, daß sich '*bishop*' (= Bischof) nicht zu einem Quadrat verarbeiten läßt." Die Leser von „Eureka" jedoch, einer mathematischen Zeitschrift,

die von Studenten der Universität Camebridge herausgegeben wird, hatten keine Schwierigkeiten, für das Wort *'bishop'* ein Quadrat zu finden, nachdem sie Babbages Anweisungen gelesen hatten. Das hier angeführte Quadrat (das in der Oktoberausgabe 1961 veröffentlicht wurde) ist eine der vielen guten Lösungen, die eintrafen:

B I S H O P
I L L U M E
S L I D E S
H U D D L E
P E S E T A

Soviel ich weiß, ist es bis jetzt niemandem gelungen – oder vielleicht hat es noch niemand versucht – für das Wort 'circle' (= Kreis) ein Quadrat zu finden. Es dürfen nur solche Wörter verwendet werden, die sich in einem ungekürzten Wörterbuch der englischen Sprache finden. Je einfacher die Wörter sind, desto besser ist die Lösung.

6 Die drei Zeiger der Uhr

Man stelle sich eine ideale, perfekt gehende Uhr vor, die einen Sekundenzeiger besitzt. Zu Mittag zeigen alle drei Zeiger genau an dieselbe Stelle des Zifferblattes. Wann ist der nächste Zeitpunkt, zu dem alle drei Zeiger wieder so angeordnet sind, daß sie in dieselbe Richtung zeigen? Die Antwort ist: Mitternacht.

Der erste Teil dieses Problems – der weitaus leichtere – besteht darin zu beweisen, daß die drei Zeiger nur dann die eben beschriebene Stellung einnehmen, wenn sie alle gerade nach oben zeigen. Im zweiten Teil, der etwas mehr Einfallsreichtum erfordert, ist nach der oder den exakten Zeiten gefragt, zu denen die drei Zeiger dieser Stellung, – alle zeigen in die gleiche Richtung – am *nächsten* kommen. „Am nächsten" ist folgendermaßen definiert: Zwei Zeiger zeigen auf eine Stelle des Zifferblattes, während sich der dritte in minimaler Entfernung befindet. Wann ist dies der Fall? Wie weit ist der dritte Zeiger entfernt?

Es wird angenommen (wie es bei Problemen dieser Art üblich ist), daß sich alle drei Zeiger gleichförmig bewegen, so daß die Zeit bis zu jeder beliebigen Genauigkeit feststellbar ist.

7 Drei Kryptorithmen

Von den drei beachtenswerten Kryptorithmen in Bild 40 ist der erste (oben) leicht, der zweite (Mitte) von mäßiger Schwierigkeit und der dritte (unten) so schwierig, daß ich nicht erwarte, daß ihn ein Leser ohne Hilfe eines Computers wird lösen können. *Aufgabe 1:* Jeder Punkt steht für eine der zehn Ziffern von 0 bis einschließlich 9. Es kann sein, daß einige Ziffern öfter als einmal, andere überhaupt nicht auftreten. Wie man sieht, ergibt die Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen eine vierstellige, zu der man

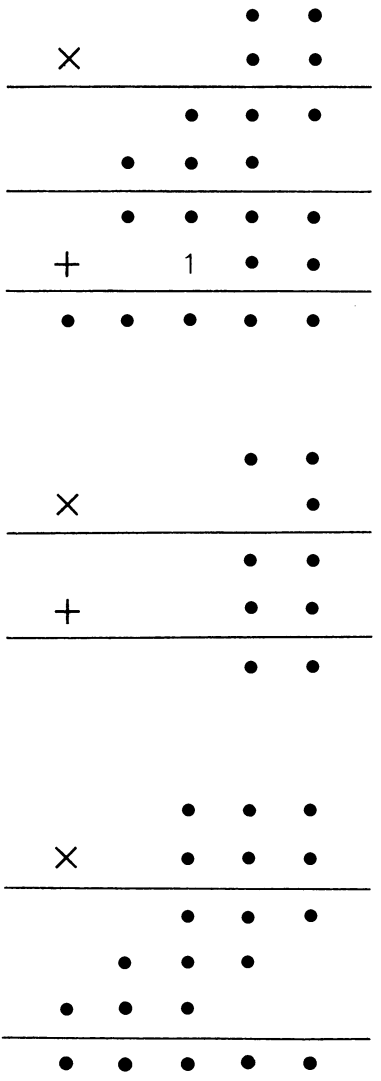


Bild 40
Drei Kryptorithmen

eine dreistellige, mit 1 beginnende Zahl addiert. Es ist nun jeder Punkt durch die entsprechende, richtige Ziffer zu ersetzen. Die Lösung ist eindeutig.

Aufgabe 2: Wie im ersten Kryptorithmus folgt auf eine Multiplikation eine Addition. In diesem Fall jedoch ist null ausgeschlossen und jede andere Ziffer darf nur einmal vorkommen. Die Lösung ist eindeutig.

Augabe 3: Jeder Punkt in diesem Multiplikationsbeispiel steht wieder für eine der Ziffern von 0 bis 9 einschließlich. Jede Ziffer erscheint *zweimal*. Die Lösung ist wiederum eindeutig.

8 Maximale Zugmöglichkeiten für Schachfiguren

Ordnet man die acht Schachfiguren gleicher Farbe (mit Ausnahme der Bauern) in der üblichen Ausgangsstellung auf dem Schachbrett an, gibt es 51 verschiedene Züge. Türme und Läufer können jeweils 7 verschiedene Züge machen, die Springer und der König je 3 und die Dame 14. Verändert man die Position der Figuren, ist es möglich, die Anzahl der Züge zu erhöhen. Wie hoch ist das Maximum? Mit anderen Worten, wie kann man die acht Figuren einer Farbe so auf dem leeren Brett anordnen, daß man die höchstmögliche Anzahl verschiedener Züge durchführen kann?

Die zwei Läufer sollten in Übereinstimmung mit der üblichen Aufstellung auf Felder verschiedener Farbe gestellt werden. Rochieren wird nicht als Zug gezählt. Eigentlich ist keine dieser Bedingungen notwendig, weil in beiden Fällen das Nichtbeachten die Zugmöglichkeiten der Figuren einschränken würde.

9 Das Falten eines Möbiusbandes

Stephen Barrs Methode, ein Möbiusband aus einem quadratischen Stück Papier zu falten, ist im Kapitel 2 erklärt worden. Das Quadrat (im Bild 41, links) wird zweimal entlang der gestrichelten Linien in die Hälfte gefaltet, und dann wird die Kante B mit der Kante B' verbunden. Das Ergebnis ist ein Streifen mit einer halben Drehung, der nur eine Seite und eine Kante besitzt; dies ist ein richtiges Modell der Möbiusfläche, obwohl es nicht zu einer näheren Untersuchung auseinandergefaltet werden kann.

Nun wollen wir anstelle des Quadrates ein Rechteck aus Papier verwenden, das zweimal so lang wie breit ist (Bild 41, rechts). Ist es möglich, dies zu einem Möbiusband zu falten, in dem B und B' verbunden sind? Das Papier kann auf jede beliebige Art gedreht oder gefaltet werden, aber es darf natürlich nicht zerreißen. Man nimmt an, daß das Papier so dünn wie möglich gemacht werden kann. Damit die Kante B entlang ihrer vollen Länge mit der Kante B' verbunden werden kann, muß man die Fläche einer halben Drehung unterziehen. Es wäre nicht schwer, so ein Band zu erhalten, indem man A mit A' verbindet; die Frage hier ist, einen Weg zu finden, bei dem man die zwei längeren Kanten miteinander verbindet.

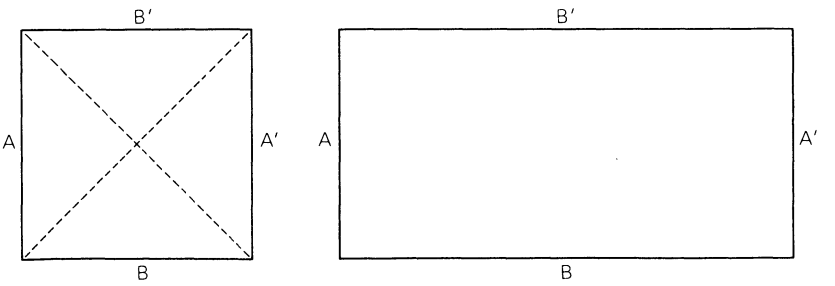
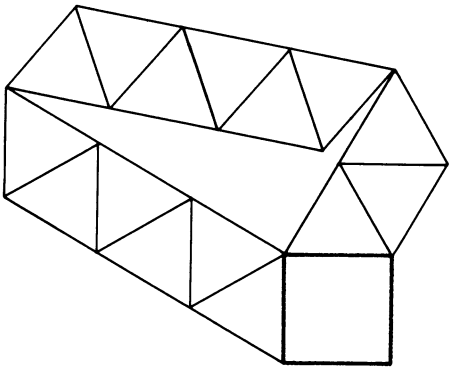


Bild 41 Problem des Möbiusbandes

Hat der Leser entweder eine Möglichkeit gefunden oder erkannt, daß es unmöglich ist, ergibt sich noch eine interessante Frage. Für welchen kleinsten Wert von A/B wird es möglich sein, ein Möbiusband durch Verbinden der Kanten B und B' zu falten?

Lösungen

1. Zum Verstreben eines Quadrates in der Ebene mit einer minimalen Anzahl von Hölzchen, die alle die Länge einer Quadratseite haben, benötigt Raphael M. Robinson in seiner besten Variante, wenn man von den 4 Hölzchen des Quadrates absieht, noch weitere 31. Bild 42 zeigt zwei von vielen guten Lösungen.
   57 Lesern von "Scientific American" gelang es, diese Anzahl auf 25 zu vermindern (Bild 43). Als ich mich gerade von dem Schock erholte, den diese eleganten Lösungsvorschläge bei mir hervorgerufen hatten, verblüfften mich sieben Leser – G. C. Baker, Joseph H. Engel, Kenneth J. Fawcett, Richard Jenney, Frederick R. Kling, Bernard M. Schwartz und Glenwood Weinert – durch eine Lösung mit nur 23



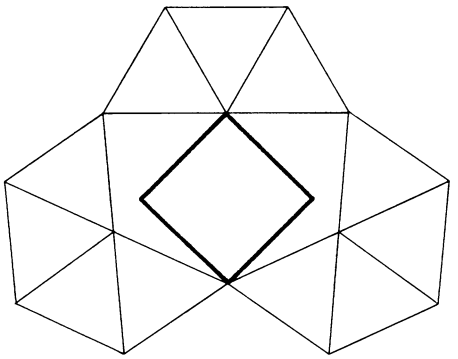


Bild 43 Lösung mit 25 Hölzchen

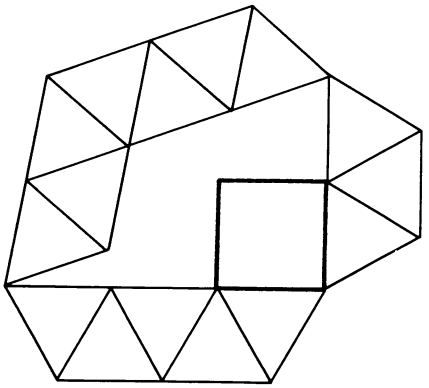


Bild 42
Lösungen zur Verstrebung eines Quadrates

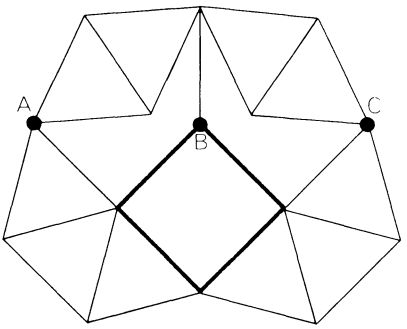


Bild 44
Lösung mit 23 Hölzchen

Hölzchen, wie sie im Bild 44 gezeigt wird. Es wird einsichtig, daß diese Anordnung starr ist, wenn man sich überlegt, daß die Punkte *A*, *B* und *C* kollinear sein müssen. Alle Lösungen, die aus weniger als 23 Hölzchen bestanden, waren entweder nicht starr oder geometrisch unexakt. Viele Leser sandten uns zum Beispiel die Lösung von Bild 45, oben, die nicht starr ist oder die untere, welche zwar starr ist, in der die Strecke *A* unglücklicherweise jedoch etwas länger als die gegebene Einheitsstrecke ist.

Das Problem läßt sich natürlich auch auf andere regelmäßige Vielecke verallgemeinern. Beim Sechseck braucht man die Verstrebung nur innen anzubringen (wie viele Hölzchen?), aber das Fünfeck bereitet erhebliche Schwierigkeiten. T. H. O'Beirne gelang es, ein regelmäßiges Fünfeck mit 64 zusätzlichen Hölzchen starr zu machen, aber es ist noch nicht bekannt, ob diese Anzahl minimal ist.

2. Bill wirft eine Münze auf, John zwei. John gewinnt, falls er mehr Köpfe als Bill wirft. Eine Aufstellung der acht gleich wahrscheinlichen Möglichkeiten, wie 3 Münzen fallen können, zeigt, daß John in vier Fällen gewinnt, in drei verliert. Seine Gewinnchancen stehen 1:2, also genau so wie in dem Fall, daß nur eine einzige Münze geworfen wird. Wann immer John eine Münze mehr als Bill hat bleiben seine Gewinnchancen gleich. Hat er 51 und Bill 50 Münzen, so hat immer noch jeder einzelne die gleiche Chance zu gewinnen. Dieses Problem erschien im kanadischen Rätselmagazin "Ibidem", Dezember 1961, S. 24; es ist von Ronald Wohl beigesteuert worden, einem Chemiker, der unter dem Pseudonym „Ravelli" schreibt.

3. Der einfachste Weg, mit Bleistift und Papier allein Robert Abbotts dreidimensionales Labyrinth zu lösen ist folgender: Man setzt in jedes Feld einen Punkt und verbindet alle jene Punktepaare, die nicht durch Seitenwände getrennt sind. Da es nur auf die topologischen Eigenschaften ankommt, ist es egal, wie die Verbindungslinien zweier Punkte verlaufen, solange sie diese nur richtig miteinander verbinden.

Im nächsten Schritt werden alle Sackgassen und auch alle schleifenförmigen Wege, die einem nur auf Umwegen von einem Punkt zum anderen führen, obwohl es einen kürzeren Weg gibt, eliminiert. Schließlich bleibt nur mehr der kürzeste Weg übrig. Dieser wird im Bild 46 gezeigt. Es ist bemerkenswert, daß kurz nach dem Anfang

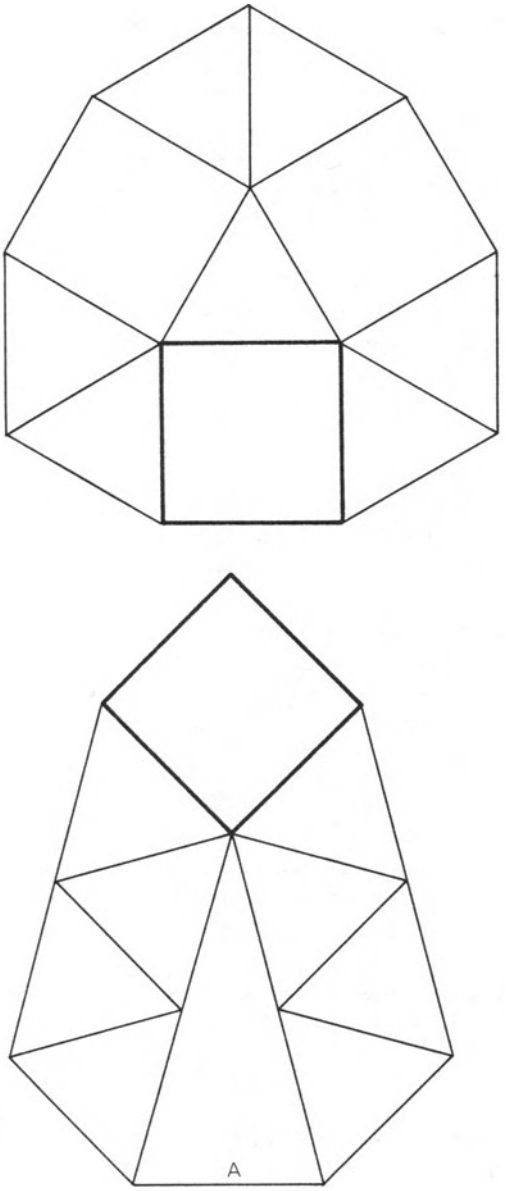


Bild 45 Zwei falsche Lösungen zur Verstrebung eines Quadrates

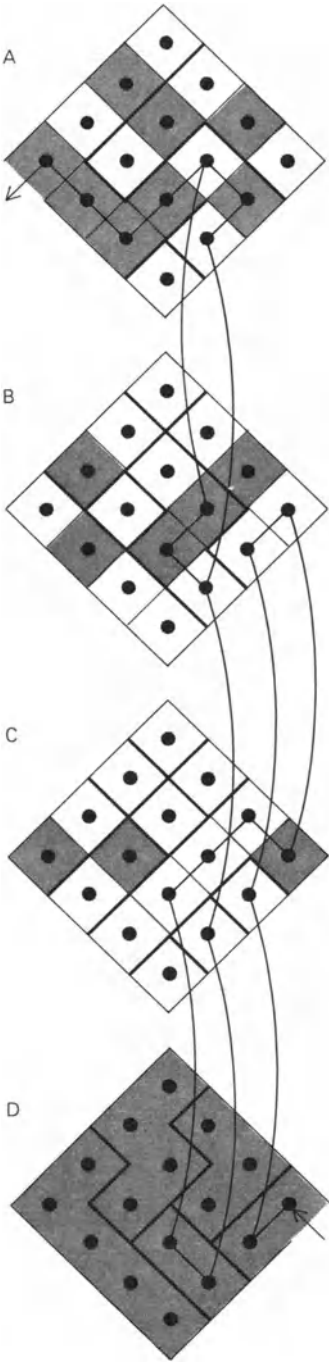


Bild 46 Lösung des dreidimensionalen Labyrinths

zwei Schleifen zwei verschiedene Wege gleicher Länge liefern. Jede der langen, geschwungenen Linien stellt im echten Labyrinth natürlich nur eine Einheitslänge dar und das gesamte Labyrinth kann daher auf einem Weg durchlaufen werden, der 19 Einheiten lang ist.

Eine andere Möglichkeit, in einem beliebigen Labyrinth den kürzesten Weg zu finden, besteht darin, aus einer Schnur ein Modell des Systems anzufertigen. Die Länge eines jeden Teiles der Schnur muß proportional zu dem Teil des Labyrinths sein, den es darstellt; außerdem müssen die einzelnen Teile entsprechend gekennzeichnet sein, damit man sie richtig zuordnen kann. Ist das Modell soweit fertig, faßt man es mit der einen Hand am „Beginn", mit der anderen „am Ende" des Systems an. Umwege und Sackgassen bleiben lose hängen. Der gestraffte Teil der Schnur ist genau der minimale Weg!

Eine dritte Möglichkeit besteht darin, die erste Zelle mit „1" zu bezeichnen. Alle Zellen, die nun in einem Schritt erreichbar sind, werden mit „2" bezeichnet; mit „3" alle jene, die von den 2er-Zellen in einem Schritt erreicht werden können. Man fährt so fort, wobei jede Zelle aber nur einmal nummeriert werden darf. Kommt man zu einer Zelle, die schon eine Nummer hat, darf man ihr keine höhere Zahl zuweisen. Nachdem alle Zellen durchnummeriert worden sind, beginnt man bei der letzten und sucht einen Weg durch die nummerierten Zellen, immer von einer Zahl zur nächstniedrigeren. So erhält man den kürzesten Weg.

Über diese und andere Algorithmen, durch Labyrinthe und graphische Bilder minimale Wege zu finden, ist schon sehr viel geschrieben worden. Die folgende Liste nennt neuere Beiträge, in denen der Leser wiederum Hinweise auf frühere Literatur findet:

4. Der Reisende mit der goldenen Uhrkette, die aus 23 Gliedern besteht, kann seiner Wirtin 23 Tage hindurch für jeden Tag ein Glied geben und braucht trotzdem nur zwei Glieder aus der Kette zu schneiden. Schneidet er das vierte und das elfte Glied heraus, erhält er die zwei einzelnen Glieder und Teilstücke, die aus 3, 6 und 12 Gliedern bestehen. Kombiniert man diese Teilstücke auf verschiedene Arten, erhält man jede beliebige Länge zwischen 1 und 23.

   Dies ist nun die Formel für die maximale Länge einer Kette, bei der dies mit n Schnitten erreicht werden kann:

   $$[(n + 1)\, 2^{n+1} - 1].$$

   So genügt es, bei einer siebengliedrigen Kette ein Glied herauszuschneiden (das dritte), bei einer aus 63 Gliedern drei (das fünfte, vierzehnte und einunddreißigste) usw.

5. Ich muß gestehen, daß gerade jenes Problem, das ich als bisher nicht untersucht betrachtete, doch schon behandelt worden ist; im Gegenteil ist es, wie Dimitri Borgman mich informierte, eines der ersten englichen Wortquadrate die veröffentlicht wurden. In einem Brief an die englische Zeitschrift "Notes and Queries" vom 21. Juli 1859 berichtete ein Leser, der mit W. W. zeichnete, von einem Spiel, bei dem Worte zu Quadraten ergänzt werden und das „in letzter Zeit in der Gesell-

schaft sehr beliebt gewesen sei". Weiterhin führte er das folgende Beispiel an: Circle, Icarus, Rarest, Create, Lustre, Esteem. „Wahrscheinlich", schrieb er, „gibt es noch andere Möglichkeiten, den Kreis (= Circle) in ein Quadrat zu verwandeln". Dem ist wirklich so. Als ich dieses Problem in "Scientific American" veröffentlichte, fanden mehr als 1000 Leser über 250 verschiedene Möglichkeiten.

Ich weiß nicht, mit welcher ich beginnen soll. Am häufigsten kam als zweites Wort Inures vor, in der angeführten Reihenfolge gefolgt von Iberia, Icarus und Ishoel. Die meisten Leser (227) kamen auf folgende Lösung: Circle, Inures, Rudest, Crease, Lesser (oder Lessor), Esters. Fast gleich viele (210) sandten ein ähnliches Quadrat, jedoch mit Lessee und Esteem als letzte Wörter. „Dies war sehr einfach" schrieb Allan Abrahamse (= done with *ease*), als lustige Anspielung darauf, daß die Hauptdiagonale nur aus E's besteht. Sechsundfünfzig Leser fanden dieses Quadrat: Circle, Inures, Rumens, Create, Lenten, Essence.

Mit Iberia an der zweiten Stelle war dies das häufigste Quadrat: Circle, Iberia, Recent (oder Relent, Repent usw.), Create, Linter, Eaters (oder Eatery). Das häufigste mit Icarus an zweiter Stelle: Circle, Icarus, Rarest, Create, Luster, Esters. Mit Ishoel an zweiter Stelle: Circle, Ishoel, Roband (oder Roland), Chaise (oder Chasse), Lenses, Eldest. Jedes dieser Quadrate wurde von mehr als hundert Lesern gefunden.

Von 40 anderen Worten, die an zweiter Stelle auftraten, war Imaret das beliebteste. Es wurde von mehr als 40 Lesern meist in folgender Art und Weise verwendet: Circle, Imaret, Radish, Crissa, Lesson, Ethane. Ein einziger Leser fand viele Quadrate mit ungewöhnlichen Worten; die folgenden Beispiele sind repräsentativ:

Circle, Imoros, Romist, Crimea, Losest, Estate (Fredrick Chait).
Circle, Isolux, Rosace, Claver, Lucent, Exerts (Ross and Otis Schuart).
Circle, Iterum, Refine, Cringe, Lunger, Emeers (Ralph Hinrichs).
Circle, Isaian, Rained, Cingle, Laelia, Endear (Robert Utter).
Circle, Ironer, Rowena, Cnemis, Lenite, Eraser (Ralph Beaman).
Circle, Inhaul, Rhymed, Camise, Lueses, Eldest (Riley Hampton).
Circle, Irenic, Regime, Cnidus, Limuli, Ecesis (Mrs. Barbara B. Pepelko).

Viele Leser versuchten sich an der schwierigen Aufgabe, "square", das Quadrat selbst, in ein Quadrat zu verarbeiten. Es trafen dazu ungefähr 24 verschiedene Lösungen ein, alle mit esoterischen Worten wie Square, Quaver, Uakari, Avalon, Rerose, Erinea (Mrs. P. J. Frederico). Einige Leser versuchten, das Dreieck (= triangle) in ein Quadrat zu verwandeln, aber ohne Erfolg. Edna Lalande schaffte es für die Ellipse: Ellipse, Lienees, Lecamas, Inagile, Pemican, Sealane, Essenes.

Vier Leser (Quentin Derkletterer, Solomon Golomb, John McClellan und James Topp) fanden unabhängig voneinander dieses herrliche Wortquadrat:

C U B E
U G L Y
B L U E
E Y E S

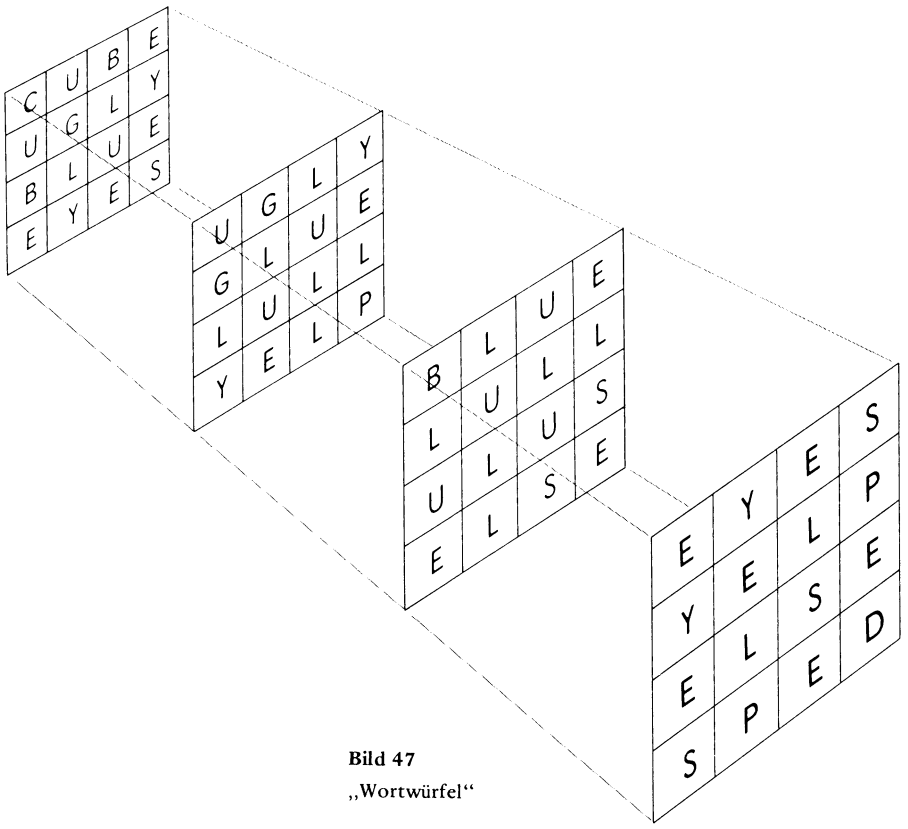


Bild 47
„Wortwürfel"

Derkletterer ging von diesem Quadrat aus und es gelang ihm, entlang einer dritten Koordinate, den Würfel (= cube) in einen Wortwürfel zu verwandeln: Cube, Ugly, Blue, Eyes; Ugly, Glue, Lull, Yelp; Blue, Lull, Ulus, Else; Eyes, Yelp, Else, Sped; (Bild 47). Patrick O'Neil und Charles Keith fanden folgenden Würfel: Cube, Upon, Bold, Ends; Upon, Pole, Olio, Neon; Bold, Olio, Liar, Dora; Ends, Neon, Dora, Snap. Benjamin F. Melkum und Glenn A. Larson fanden noch weitere Möglichkeiten für das Wort "Cube"; sie versuchten sich dann noch entlang der vierten Koordinate und fanden Hyperwürfel für die Worte 'Pet' und 'Eat'. Es gelang ihnen aber nicht, die Kugel (= sphere) in einen Würfel zu verwandeln. R. J. Rea gelang es mit Eiern (= eggs); und H. M. Thomas und H. P. Thomas fanden Würfel für 'root, dice, beef' und 'ice' (Wurzel, Spielwürfel, Rindfleisch und Eis), aber keinen für 'sugar' (Zucker).

Leigh Marcer, der Londoner Experte für Wortspiele, sandte mir die bekanntesten Quadrate, in denen die Wörter in ihrer gegebenen Reihenfolge sogar Sätze bilden:

Just, Ugly, Slip, Type.
Might, Idler, Glide, Hedge, Trees?
Crest, Reach, Eager (Scene Three).
Leave, Ellen, Alone, Venom, Enemy.

6. Durch Anwendung elementarer diophantischer Analysis kann man sehr schnell beweisen, daß alle drei Zeiger einer Uhr nur dann sich treffen, wenn sie alle auf 12 zeigen. Trifft der Stundenzeiger mit einem der beiden anderen Zeiger zusammen, so muß die Differenz der Entfernungen, die beide zurückgelegt haben, eine ganzzahlige Anzahl von Stunden betragen. Der Stundenzeiger macht innerhalb von 12 Stunden genau eine Runde auf dem Zifferblatt. Nehmen wir an, er legt die Entfernung x zurück, die weniger als eine ganze Umdrehung ist, bis er zu einer Stellung gelangt, in der alle drei Zeiger zusammentreffen. Hat der Stundenzeiger die Entfernung x zurückgelegt, so hat der Minutenzeiger genau die Entfernung $12x$ zurückgelegt und die Differenz beträgt somit $11x$. In der selben Zeitspanne legt der Sekundenzeiger die Entfernung $720x$ zurück, die Differenz beträgt in diesem Fall $719x$. Die drei Zeiger können einander nur dann treffen, wenn es einen Wert x gibt, so daß sowohl $719x$ als auch $11x$ ganzzahlig sind. Da aber beide Zahlen Primzahlen sind, ist dies nur für x gleich 0 oder 1 möglich, also um 0 bzw. 12 Uhr.
Sieht man von dem Fall ab, in dem alle drei Zeiger gerade nach oben zeigen, tritt der nächstgünstige Fall (der folgendermaßen definiert ist: Zwei Zeiger stehen übereinander, der dritte befindet sich in minimalem Abstand) um 16 Minuten und $16\frac{256}{719}$ Sekunden nach 3 Uhr und wiederum um 43 Minuten und $43\frac{463}{719}$ Sekunden nach 8 Uhr ein.
Diese zwei Zeiten sind zueinander im folgenden Sinn spiegelbildlich: Hält man einen Spiegel vor eine Uhr, die eine der beiden Zeiten zeigt und liest man das Bild so, als wäre die Uhr nicht umgekehrt, so zeigt das Bild genau die andere Zeit. Die Summe der beiden Zeiten ist genau 12. In beiden Fällen treffen der Sekunden- und der Stundenzeiger zusammen, während sich der Minutenzeiger in der Entfernung von $\frac{360}{719}$ eines Bogengrades befindet. (Die Entfernung beträgt $5\frac{5}{719}$ Sekunden, falls wir eine Sekunde als den sechzigsten Teil der Entfernung definieren, die in einer Minute zurückgelegt wird.) Im ersten Fall befindet sich der Minutenzeiger in diesem Abstand hinter den zwei anderen Zeigern, im zweiten Fall um diesen Abstand voraus.
Henry D. Friedmann bei Sylvana Electronic Systems fand einen weiteren Beweis dafür, daß die drei Zeiger nur um 12 Uhr zusammentreffen. Der Stunden- und der Minutenzeiger treffen sich elf mal, mit einer Periode von 12/11 Stunden, wodurch der Umfang des Zifferblattes genau in elf gleiche Teile zerlegt wird. Durch den Minuten- und den Sekundenzeiger erfolgt auf ähnliche Weise eine Zerlegung in 59 gleiche Teile. Alle drei Zeiger können sich nur an einem Punkt treffen, an dem

$r/11 = s/59$ ist, wobei r und s positive ganze Zahlen sind und r kleiner 11, s kleiner 59. Da sich 11/59 nicht mehr zu r/s kürzen läßt, können sich die drei Zeiger nur um 12 Uhr treffen.

7. Die drei Kryptorithmen haben die eindeutigen Lösungen, die im Bild 48 gezeigt werden. Den obersten hat sich Stephen Barr ausgedacht, der unten links stammt von dem Engländer Henry Ernest Dudeney, einem Rätselfachmann; der letzte ist Fredricks Schuhs "Wonderlijke Problemen" entnommen. Eine Übersetzung von Schuhs Analyse findet sich auf den Seiten 287-291 in F. Gobels "Master Book of Mathematical Recreations".
Der dritte Kryptorithmus, von dem ich annahm, er sei ohne Computer nicht lösbar, wurde von nicht weniger als 53 Lesern von "Scientific American" mit nur Bleistift und Papier gelöst. Nur wenige von denen, die eine Lösung gefunden hatten, bemühten sich noch zu zeigen, daß dies die einzig mögliche sei. Sechs Leser jedoch haben Programme geschrieben, um alle Möglichkeiten durchzuprobieren und sie haben die Eindeutigkeit der Lösung bestätigt.

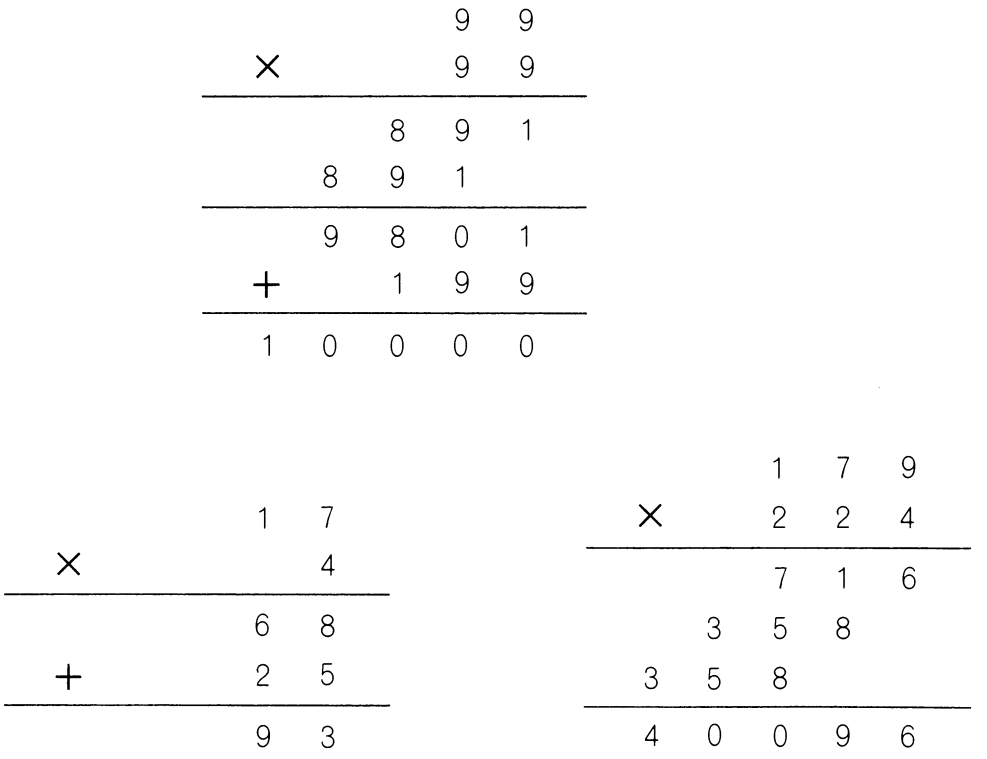


Bild 48 Lösungen der Kryptorithmen

8. Gruppiert man acht Schachfiguren einer Farbe wie im Bild 49 auf dem Brett, dann kann man genau 100 verschiedene Züge durchführen. Dem Engländer T. R. Dawson zufolge, der sich mit Schachproblemen aller Art beschäftigt, ist diese Frage erstmals von dem deutschen Schachexperten M. Bezzel im Jahr 1848 gestellt worden. Seine Lösung, die hier gezeigt wird, wurde im darauffolgenden Jahr veröffentlicht. 1899 bewies E. Landau in „Der Schachfreund", daß 100 das Maximum und daß Bezzels Lösung eindeutig ist, sieht man von dem trivialen Fall ab, daß der Turm statt auf dem siebten Feld in der vierten Reihe von oben genausogut auf dem ersten Feld dieser Reihe stehen könnte.

Unter den vielen Lesern, die dieses Schachproblem gelöst haben, haben vierzehn auch einen detaillierten Beweis dafür geliefert, daß 100 Züge wirklich das Maximum darstellen.

Für ein Beispiel einer Anordnung der acht Figuren, die eine *minimale* Anzahl von Zügen (zehn) erlaubt, vergleiche man mein Buch „Logik unterm Galgen", S. 74, Bild 38.

9. Für welchen kleinsten Wert von A/B kann man die mit B bezeichneten Kanten des Rechteckes aus Papier zu einem Möbiusband verbinden? Überraschenderweise *gibt* es kein Minimum. Man kann A/B so klein wählen wie es einem beliebt.

Der Beweis ergibt sich aus einer Faltmethode, die in Stephen Barrs "Experiments in Topology" (New York: T. Y. Crowell, 1964) erklärt wird. Der Streifen wird

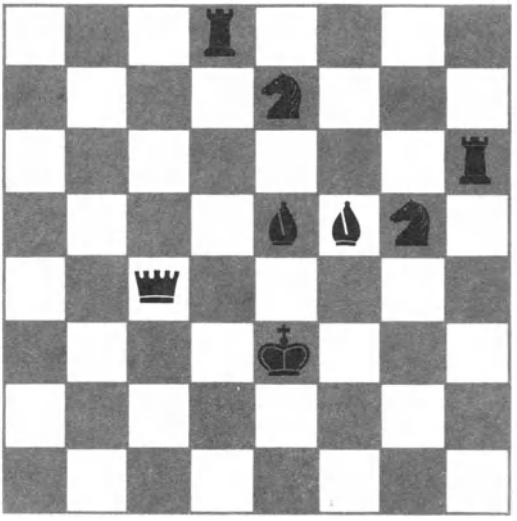


Bild 49
Aufstellung für eine maximale Anzahl von Zügen

wie im Bild 50 so gefaltet, daß er einen schmalen Streifen bildet, der zweifach symmetrisch ist. Diesen schmalen Streifen unterzieht man einer halben Drehung und verbindet die Enden. *Voilà*!

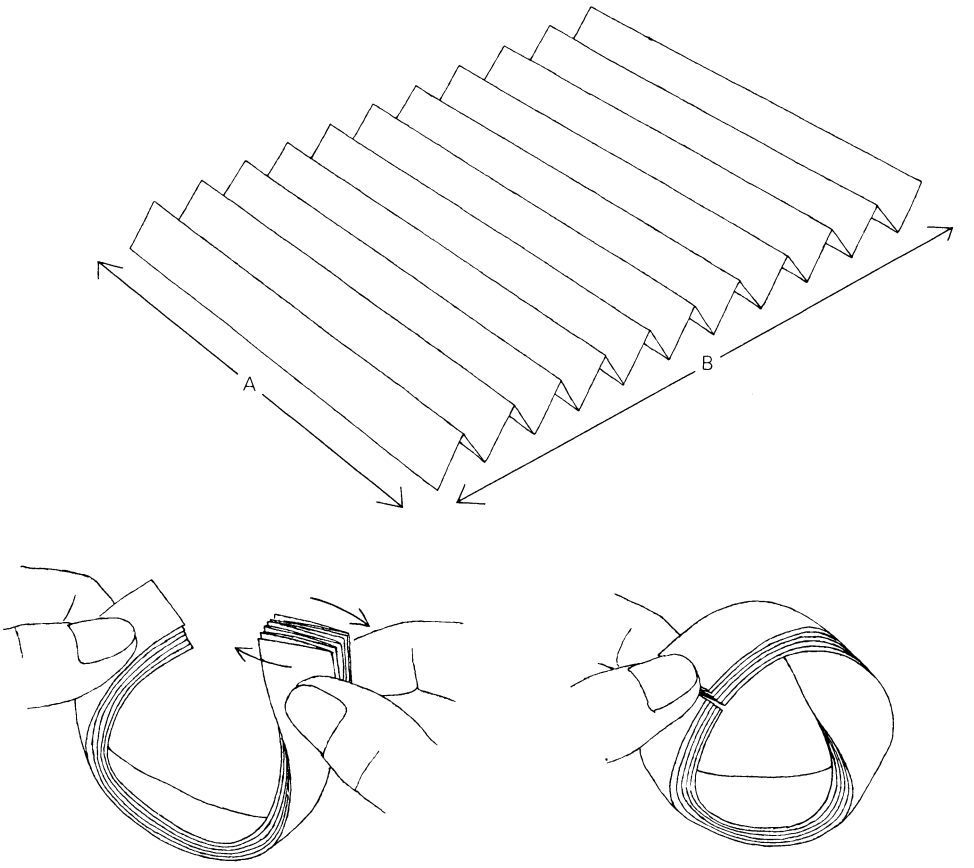


Bild 50 Lösung zum Möbiusband

7 Puzzles mit verschiebbaren Klötzen

Die „älteren Einwohner von Puzzleland" werden sich erinnern – schrieb Sam Loyd in seiner "Cyclopedia of Puzzles" – wie Anfang der Siebziger-Jahre die ganze Welt nach einer kleinen Schachtel mit verschiebbaren Klötzen, die als mein „14-15 Puzzle" bekannt wurde, verrückt war. Fünfzehn durchnumerierte Klötze wurden so in eine quadratische Schachtel gelegt, wie in Bild 51 gezeigt wird. Das Ziel war es, die Klötze solange zu verschieben, bis der 14-15 Fehlstand korrigiert war und alle Klötze in der richtigen Reihenfolge lagen, wobei das leere Feld wieder rechts unten liegen mußte.

Diese Manie erreichte binnen kurzer Zeit Großbritannien und Europa. Die Leute waren in dieses Puzzle völlig vernarrt – fuhr Loyd in seinem Bericht fort – und unglaubliche Geschichten von Geschäftsleuten, die ihre Läden nicht mehr öffneten, werden erzählt; außerdem soll ein bekannter Geistlicher eine ganze Winternacht unter einer Straßenlaterne gestanden und dabei versucht haben, sich den Weg, wie er das Meisterstück vollbracht hatte, ins Gedächtnis zurückzurufen ... Ein bekannter Verleger aus Baltimore erzählte, wie er zum Mittagessen ging und lange nach Mitternacht von seinen besessenen Angestellten dabei entdeckt wurde, wie er auf einem Tablett kleine Kuchenstücke umherschob.

Das Interesse an dem Puzzle flaute ab, nachdem einige Mathematiker Artikel veröffentlicht hatten, die bewiesen, daß das Problem unlösbar war. Heute wird das Puzzle (das in verschiedenen Formen noch immer verkauft wird) manchmal von Computerfachleuten als ein Miniaturmodell einer sequentiellen Maschine zitiert. Jede Verschiebung eines Klotzes ist ein Input, jede Anordnung bzw. jeder „Zustand" der Klötze

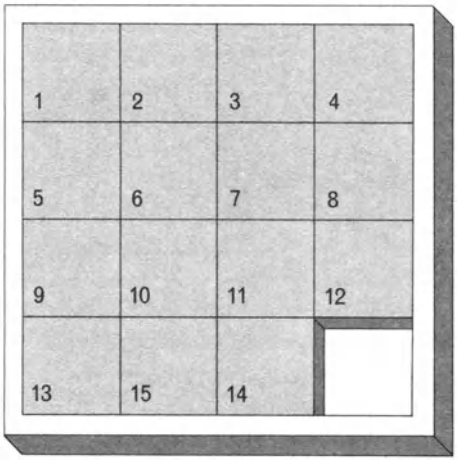


Bild 51
Sam Loyds 14–15 Puzzle

ist ein Output. Es stellt sich heraus, daß genau die Hälfte der 15! ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15$), oder 1,307,674,368,000 möglichen Zustände der Maschine erreichbare Outputs sind. Die mathematische Theorie des 14-15 Puzzle ist für alle Puzzles mit verschiebbaren Klötzen gültig, bei denen die Stücke Einheitsquadrate und die Felder Rechtecke sind.

Nicht gültig ist diese Theorie jedoch für solche Puzzles, bei denen die Stücke *nicht* Einheitsquadrate sind. Der Erfolg von Loyds Puzzle bewirkte einen Puzzle-Boom – mit verschieden geformten Stücken – der in den vergangenen achtzig Jahren in der ganzen Welt einen Verkaufserfolg erbrachte. Diese Puzzles entbehren gänzlich einer Theorie. In Ermangelung von empirischen Methoden kann niemand bestimmen, ob ein gegebener Zustand sich aus einem weiteren gegebenen Zustand erhalten läßt, und wenn, weiß niemand, wie man mit einer minimalen Verschiebungsfolge den gewünschten Zustand erreicht. Diese unterhaltsamen Puzzles bieten für Computerprogrammierer alle nur denkbaren Herausforderungen. Für alle anderen stellen sie spannende Patiencespiele dar, die in wenigen Minuten mit einer Schere aus Karton herstellbar sind.

Ein Puzzle dieser Art, vielleicht das früheste und sicherlich das am meisten verkaufte, wird in Bild 52 gezeigt. Dem Leser wird dringend geraten, das Lesen zu unterbrechen und die neun Stücke aus einem Bogen dünnen Kartons auszuschneiden. Das Schaubild läßt sich leicht kopieren, indem man ein vier-mal-fünf Rechteck zeichnet, dieses in Einheitsquadrate unterteilt und dann die neun Stücke herauszeichnet. Man numeriere sie wie vorgegeben, schneide sie aus und lege sie auf ein auf Papier oder Karton in Kontrastfarbe gezeichnetes vier-mal-fünf Rechteck. Das Problem ist nun folgendes: Indem man die Stücke auf dem Papier innerhalb des Rechtecks verschiebt, bringe man das große Quadrat von Ecke *A* nach Ecke *C*.

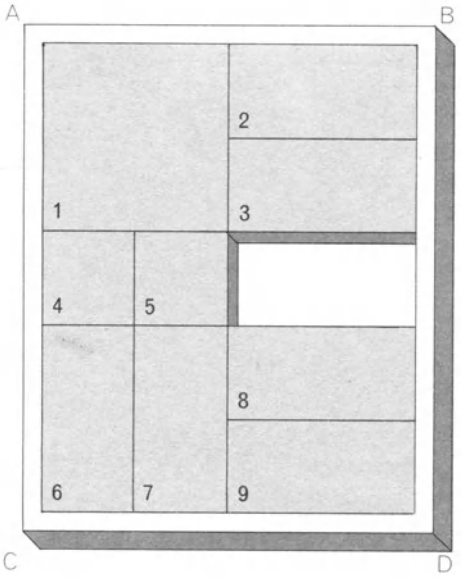


Bild 52 Dad's Puzzle

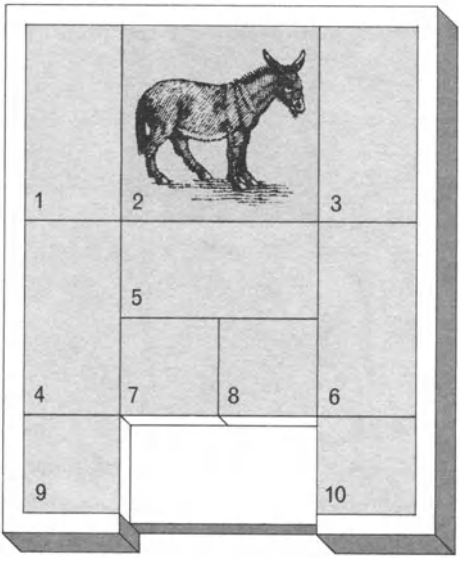


Bild 53 L'Ane Rouge Puzzle

Es ist leicht, das Quadrat nach Ecke *B* zu verschieben. Man verschiebe die Stücke in folgender Reihenfolge: 5, 4, 1, 2, 3; 4 (nach oben und rechts), 1, 6, 7, 8; 9, 5, 4, 1, 6; 7 (zur Hälfte), 9, 5, 4, 8; 6, 2, 3, 1. Dies ist eine Lösung mit minimalen 24 Verschiebungen, wofür ich Edward E. Roderick, Alfred C. Collins, Jan-Henrik Johansson und Michel Hénon zu Dank verpflichtet bin. (Das Verschieben eines Stücks „um eine Ecke" wird als eine Verschiebung gezählt.) Um das große Quadrat nach Ecke *D* zu verschieben benötigt man 29 Schritte. Die ersten 19 sind dieselben wie zuvor, dann setze man mit 1, 3, 2, 6, 7; 8, 9, 4, 5, 1 fort.

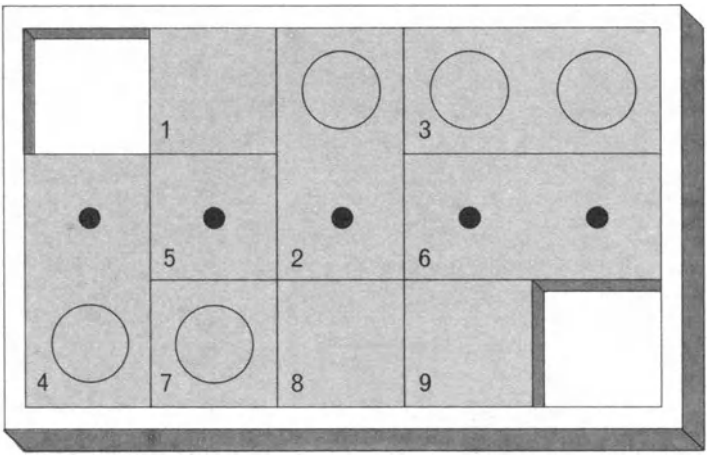
Es ist nicht möglich, das große Quadrat in weniger als 59 Schritten aus Ecke *A* nach Ecke *C* zu verschieben. Der Leser versuche selbst, ob er dieses Minimum erreichen kann, bevor die Schritte erklärt werden. Kartonstücke sind völlig ausreichend, obwohl hübschere und dauerhaftere Modelle aus Holz, Plastik, Linoleum, usw. hergestellt werden können. Die Randleiste kann durch Aufkleben von Streifen auf ein Holzbrett angefertigt werden. Das Brett sollte mit Sandpapier geglättet werden um ein leichtes Verschieben zu ermöglichen; die Ecken der Stücke sollten abgerundet und ihre Kanten leicht abgeschrägt werden.

Der Ursprung dieses ausgezeichneten Puzzles ist unbekannt. Die früheste Version in der Puzzle-Sammlung des verstorbenen Lester Grimes aus New Rochelle, New York, heißt Pennant Puzzle und wurde 1909 von L. W. Hardy urheberrechtlich geschützt und von der O. K. Novelty Company in Chicago hergestellt. Die Kartonstücke tragen die Namen von größeren Städten. Das große Quadrat, das die Heimmannschaft darstellt, ist in die Ecke zu bringen, die den ersten Platz in der Liga symbolisiert. 1926 wurde ein Holzmodell unter dem Namen "Dad's Puzzler" auf den Markt gebracht und die meisten späteren Modelle wurden Dad's Puzzle genannt. Ein billiges Modell, das gegenwärtig zum Verkauf angeboten wird, hat die Handelsbezeichnung "Moving Day Puzzle" (ein Bild eines Pianos ist auf dem großen Quadrat), und es gibt ein elegantes Modell, "Magnetic Square Puzzle" genannt, mit großen Holzstücken mit Magneten, die an einer Metallunterlage haften.

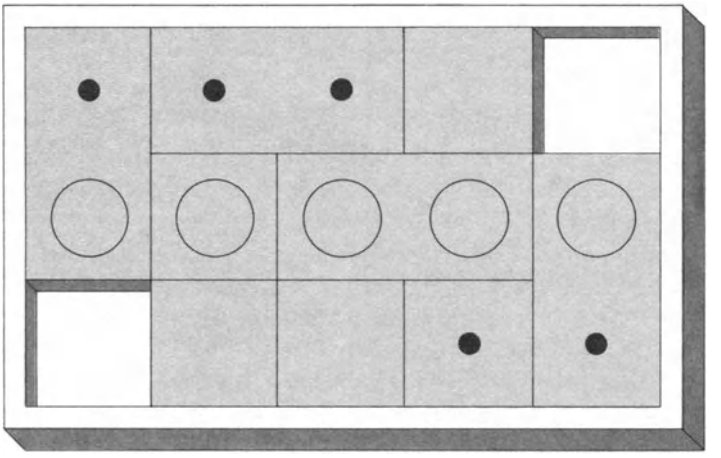
Wenn eines der zwei-mal-ein Rechtecke in "Dad's Puzzle" in die Hälfte geschnitten wird, so daß zwei Einheitsquadrate entstehen, so liefern die zehn Stücke Verschiebeklötze für ein schwierigeres Puzzle (Bild 53), das in Frankreich schon seit langer Zeit unter dem Namen „L'Âne Rouge" (der rote Esel) beliebt ist. Das Ziel des Puzzles ist es, das große Quadrat mit dem Bild des roten Esels an das untere Ende zu verschieben, so daß es dort durch die Öffnung herausgeschoben werden kann. Ein Korrespondent in Schottland erinnert sich daran, ein englisches Modell in den frühen dreißiger Jahren im Handel gesehen zu haben. In jüngerer Zeit wurde es in Amerika unter Handelsbezeichnungen wie "Intrigue", "Mov-it Puzzle" und "Hako" verkauft. Die Lösung mit einer minimalen Anzahl von Verschiebungen benötigt 81 Schritte. Sie wurde von Thomas B. Lemann, einem Anwalt aus New Orleans ausgearbeitet; ihre Minimaleigenschaft wurde 1964 von John Larmouth von Cambridge University und später von Michel Hénon bewiesen, wobei beide dazu Computer benützten.

Als 1934 die Dionne-Fünflinge geboren wurden, wurde dieses Ereignis durch das Erscheinen eines ungewöhnlichen Puzzles gefeiert, das "Line Up the Quinties" genannt wurde. (Die Kassette trägt den Aufdruck der Embossing Company aus Albany,

New York, und gibt an, daß dieses Puzzle von Richard W. Fatiguant geschaffen wurde.) In den schematischen Zeichnungen dieses Puzzles (Bild 54) stellen die fünf Kreise die Gesichter der Fünflinge dar. Die Aufgabe ist es nun, mit der in der oberen Zeichnung angegebenen Anordnung zu beginnen und sie in die in der unteren Zeichnung angegebenen Stellung zu bringen. Eine Lösung mit 30 Verschiebungen – die beste die ich gefunden habe – wird im Lösungsabschnitt angegeben.



Ausgangsstellung



Endstellung

Bild 54 Line Up the Quinties Puzzle

Es war zu erwarten, daß man auf die Idee kam, diese Art von Puzzle zu verkomplizieren, indem man nicht-rechteckige Stücke einführte. 1927 erhielt Charles L. A. Diamond aus Newsburgh, New York, das Patent Nr. 1.633.397 für das in Bild 55 gezeigte Puzzle. Es wurde unter dem Namen "Ma's Puzzle" (als offensichtliche Konkurrenz zu "Dad's Puzzle") von der Standard Trailer Company aus Cambridge Springs, Pennsylvania, hergestellt. Stück Nr. 2 wurde "Ma", Stück Nr. 5 "My Boy" benannt. (Die anderen sieben Stücke trugen die Bezeichnungen "No Work", "Danger", "Broke", "Worry", "Trouble", "Homesick" und "Ill".) Das Ziel des Puzzles ist es, "Ma" und "My Boy" so zu verbinden, daß daraus ein einziges drei-mal-zwei Rechteck in der oberen rechten Ecke der Kassette entsteht. (Dieses Rechteckt kann entweder mehr breit als hoch sein oder umgekehrt.) Ich gebe eine Lösung in 23 Schritten im Lösungsabschnitt an. Kompliziertere Puzzles, einige nur mit Rechtecken, andere mit L-förmigen Stücken, sind in Amerika und anderen Ländern auf den Markt gebracht worden. Es wurden auch Puzzles mit dreieckigen Stücken erfunden, und zwar hauptsächlich von T. H. O'Beirne aus Glasgow, aber keines ist bis jetzt gefertigt worden.

Die neueste Schöpfung auf diesem kuriosen und chronologisch nicht erfaßten Gebiet stammt von Sherley Ellis Stotts, einem Klavierstimmer aus Denver. Stotts, der den akademischen Grad eines Masters der Psychologie der Universität Colorado hat (seine Diplomarbeit handelte über die Verläßlichkeit der "Seashore" Musiktests), ist seit seinem siebenten Lebensjahr blind. In den letzten Jahren hat er eine Reihe von ungewöhnlichen Puzzles aus Draht, Holz und Plastik erfunden und hergestellt. Über einen Patentantrag für ein sogenanntes Tiger-Puzzle ist noch nicht entscheiden.

Jedes Tiger-Puzzle basiert auf einem Schaubild, das oft von Algebra-Lehrern als eine bildliche Darstellung für das Quadrat eines Polynoms verwendet wird. Ich will nur das einfachste Tiger-Puzzle beschreiben, das das Diagramm für das Quadrat von a+b+c

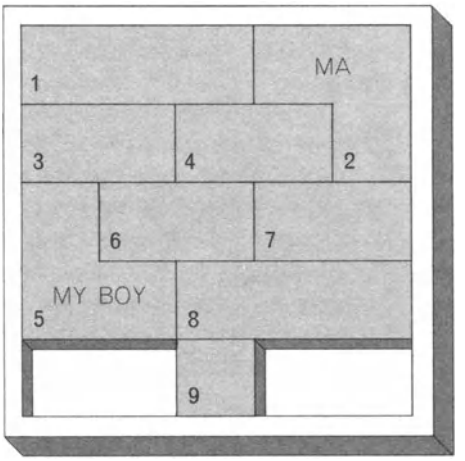
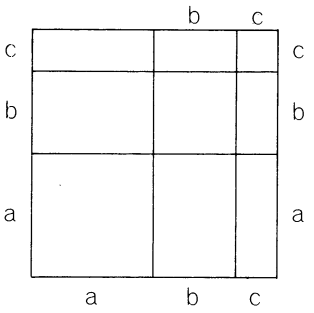


Bild 55
Ma's Puzzle



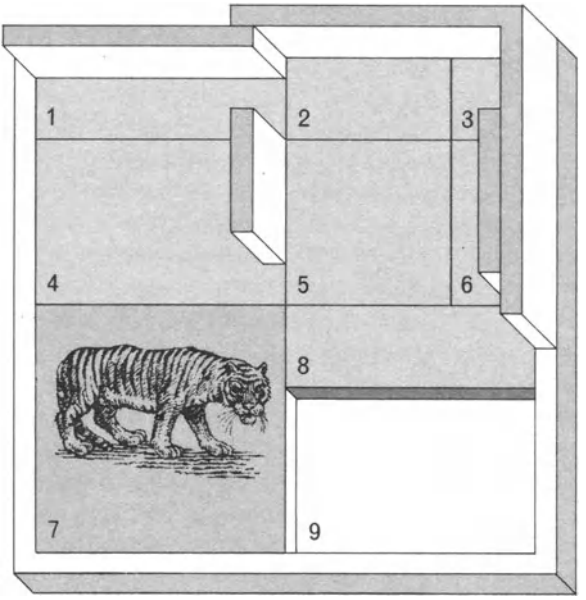


Bild 56
Stotts Tiger-Puzzle

zur Grundlage hat (Bild 56). Die drei Ausrücke a, b, und c werden durch die horizontalen und vertikalen Abschnitte auf den Seiten des Quadrats dargestellt. Wenn der Ausdruck a+b+c mit sich selbst multipliziert wird, so ergibt sich $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. Jeder dieser Ausdrücke wird nun natürlich im Bild repräsentiert: Es gibt die drei Quadrate mit den Seitenlängen a, b, bzw. c, 2 Rechtecke mit den Seiten ab, zwei mit den Seiten ac und zwei mit den Seiten bc. Stotts arbeitete diese Einteilung in das im rechten Bild gezeigte, entzückende Puzzle um. Auf das große Quadrat klebte er das Bild eines Tigers. An der oberen rechten Ecke befestigte er an den Rahmen zwei Abschnitte eines Zaunes. Drei weitere Zaunabschnitte sind, wie im Bild gezeigt, an die Stücke 1, 4 und 6 angeklebt. (Leser, die das Puzzle ausprobieren wollen, können einfach die Zäune auf Karton zeichnen.) Das Verhältnis von $a:b:c$ muß 3:2:1 sein.

Das Puzzle beginnt mit der angegebenen Stellung der Stücke, wobei das Stück 9 aus dem Feld entfernt wird. Die Aufgabe besteht nun darin, die Stücke so zu verschieben, daß das Quadrat mit dem Tiger in die obere rechte Ecke verschoben wird und vollkommen durch einen quadratischen Zaun umgeben ist. Zum Unterschied zu allen anderen vorher beschriebenen Puzzles ist der freie Raum groß genug, um zeitweilig eine 90-Grad-Drehung eines Rechtecks zuzulassen. Dies ist natürlich nur dann erlaubt, wenn die Drehung innerhalb dieses Raumes geometrisch möglich ist, wobei alle Stücke flach am Feld verleiben müssen. Im Lösungsabschnitt gebe ich eine Lösung mit 48 Schritten an.

Zur Zeit gibt es keine praktische Anwendung für eine Theorie von Puzzles mit verschieden geformten Stücken, aber es wäre kurzsichtig, zu sagen, daß niemals eine solche gefunden werden wird. Da die Automation fortschreitet, entstehen komplexe Probleme im Zusammenhang mit effizienter Lagerhaltung und Beförderung von Waren.

Es kann einmal die Zeit kommen, wo eine Hausfrau eine telephonische Bestellung an ein Geschäft aufgeben wird und Maschinen die Waren auffinden und an ein Postamt oder eine Sammelstelle liefern werden. Falls die Waren in rechteckigen Verpackungen aufbewahrt werden, ist es nicht undenkbar, daß ein gewisses Ausmaß von Verlagern von Waren innerhalb eines beschränkten Raumes vonnöten sein wird. Ähnliches findet tatsächlich in großen Stadt-Garagen und auf Parkplätzen statt, wo es notwendig ist, möglichst viele Autos innerhalb eines verfügbaren Raumes zu parken und die Autos mit maximaler Effizienz herauszuholen. In Großbritannien werden solche Puzzles mit verschiebbaren Klötzen tatsächlich oft "Garagen-Puzzles" genannt, da in einigen britischen Versionen die Klötze als in einer Garage eingeschlossene Autos dargestellt werden. Die Aufgabe dabei ist es natürlich, ein bestimmtes Auto zum Ausgang der Garage zu bringen, ohne daß dabei ein anderes Auto die Garage verlassen muß.

Wenn der Leser versucht, eines dieser Puzzles zu lösen, wird er bald eine beinahe hypnotische Anziehungskraft spüren, die Klötze auf der Suche nach einer minimalen Verschiebungsfolge in die gewünschte Stellung zu bringen. Es ist auf keinen Fall nur ein reines Probieren. Im Geiste sieht man sehr bald, daß gewisse Spielzüge in Sackgassen führen, während andere erfolgversprechend sind.

Lösungen

"Dad's Puzzle": 59 Züge. 5, 4, 1, 2, 3, 4 (nach rechts oben). 1, 6, 7, 8, 9, 5. 4, 1, 6, 7, 8, 9. 5 (nach links oben), 9, 8, 5, 4, 1. 3, 2, 7, 6, 4 (nach links oben), 6. 7, 4, 5, 6, 7, 5 (nach rechts oben). 3, 2, 5, 4, 3, 2. 4 (nach rechts unten), 2, 3, 6, 7, 1. 4, 5, 2, 3, 6, 7, 1, 4 (nach links oben), 9, 8, 1.

"L'Âne Rouge" 81 Züge. 9 (halber Zug), 4, 5, 8 (nach unten), 6, 10 (halber Zug), 8, 6, 5, 7 (nach links oben). 9, 6, 10 (nach links unten), 5, 9. 7, 4, 6, 10, 8. 5, 7 (nach rechts unten), 6, 4, 1. 2, 3, 9, 7, 6. 3, 2, 1, 4, 8. 10 (nach rechts oben), 5, 3, 6, 8. 2, 9, 7 (nach links oben), 8, 6. 3, 10 (nach rechts unten), 2, 9 (nach rechts unten), 1. 4, 2, 9, 7 (halber Zug), 8. 6, 3, 10, 9 (nach unten), 2. 4, 1, 8, 7, 6. 3, 2, 7, 8, 1. 4, 7 (nach links oben), 5, 9, 10. 2, 8, 7, 5, 10 (nach links oben). 2.

"Line Up the Quinties": 30 Züge. 9, 8, 1, 2, 3. 6, 8 (nach links oben), 2, 5 (nach rechts unten), 3. 6, 8 (nach links oben), 9, 2, 8, 6, 3, 1 (nach rechts unten), 6, 3. 5 (nach rechts oben), 1 (nach rechts unten), 7, 1 (nach links), 8. 5 (nach unten), 3, 6 (halber Zug), 4, 9.

"Ma's Puzzle": Die Lösung mit 32 Verschiebungen, die ich ursprünglich in Scientific American veröffentlichte, ist von mehr als einem Dutzend Lesern auf 23 reduziert worden. 9 (nach links), 8, 7, 6, 5. 9 (nach oben), 8, 7, 6, 4. 2, 1, 3 (nach oben), 9 (nach rechts oben), 5 (nach links oben). 6, 4 (nach rechts unten), 9 (ganz nach unten), 5, 3. 1, 2, 5.

"Tiger-Puzzle": 48 Züge. Die Buchstaben *o, u, l, r* bzw. *d* bedeuten nach oben, nach unten, nach links, nach rechts bzw. Drehung um 90 Grad. 8u, 5u, 6u, 4r, 1u. 2l, 3l, 4o, 1r, 7o, 8l, 5u, 6u, 1u, 4u. 3r, 2r, 7o, 1l, 5o. 6o, 8r, 1u, 5l, 6l. 4u, 2udr, 7r, 5o, 6l. 4l, 2ul, 3u, 7r, 5r. 6o, 4lo, 1o, 8l, 3u. 2du, 1ro, 8or, 4u, 6ur. 5l, 6o, 4o. Diese Lösung mit einem Zug weniger als ich es ursprünglich darstellte, wurde von Charles Clapham, John Harris und Thomas Kew angegeben.

8 Paritätskontrollen

She took me to her elfin grot
And there she wept and sigh'd
full sore,
And there I shut her wild, wild eyes
With kisses four.

„Warum gerade vier Küsse, werden Sie fragen", schrieb John Keats in einem Brief, obige Strophe aus seinem bekannten Gedicht *La Belle Dame sans Merci* kommentierend. „Ich mußte eine gerade Zahl wählen, so daß beide Augen zu ihrem Recht kamen .... Ich denke, daß zwei Küsse pro Auge ausreichen. Stellen Sie sich vor, ich hätte sieben gesagt; dies hätte dreieinhalb pro Auge ergeben – eine äußerst peinliche Sache."

Wenn Keats uns gesagt hätte, daß sein blasser Ritter die Augen der Dame 37mal geküßt habe, wäre dann ein empirischer Test notwendig, um festzustellen, ob jedes Auge dieselbe Anzahl von Küssen erhalten könne? Nein, denn 37 ist eine ungerade Zahl, nicht teilbar durch 2. Wir wissen sofort, daß ein Auge zumindest einmal mehr geküßt worden sein muß als das andere.

Ein alter Witz derselben Art erzählt uns von einem Mathematikstudenten, der mit seinem Mädchen einen Frühlingsspaziergang machte. Sie pflückte ein Gänseblümchen und begann die Blütenblätter auszuzupfen, wobei sie mitzählte: „Er liebt mich, er liebt mich nicht ...."

„Du machst dir wirklich eine Menge unnötiger Umstände", sagte der junge Mann. „Alles was du zu tun hast, ist, die Blütenblätter zu zählen. Wenn die Summe gerade ist, ist die Antwort negativ; wenn sie ungerade ist, ist die Antwort positiv."

Hier haben wir zwei triviale Anwendungen dessen, was die Mathematiker manchmal „Paritätskontrollen" nennen. Dies ist eine der wirkungsvollsten Methoden in der Mathematik. Wann immer ein Problem gerade und ungerade enthält, oder zwei sich gegenseitig ausschließende Mengen, die mit geraden bzw. ungeraden Zahlen identifiziert werden können, liefert eine Paritätskontrolle oft einen kurzen und eleganten Beweis für etwas, das auf andere Weise äußerst schwer zu beweisen wäre.

Das klassische Beispiel in der Zahlentheorie wurde durch den Euklidischen Beweis, der auf die Pythagoräer zurückgehen könnte, geliefert. Die Aussage besteht darin, daß die Quadratwurzel von 2 nicht als ganzzahliger Bruch (mit je einer ganzen Zahl im Zähler und Nenner) dargestellt werden kann. Da die Diagonale des Einheitsquadrats die Länge $\sqrt[2]{2}$ hat, bedeutet dies, daß kein Lineal, mag es auch noch so genau sein, die Diagonale genau zu messen imstande ist, obwohl es die Seitenlänge des Quadrats genau messen kann.

Der Beweis ist einfach zu verstehen. Man nehme an, es gibt einen solchen Bruch, n/m, der $\sqrt[2]{2}$ darstellt und bereits vollständig gekürzt ist (d. h. n und m sind bereits teilerfremd). Da das Quadrat dieses Bruches 2 ist, ergibt sich die Gleichung

$$2 = n^2/m^2, \tag{1}$$

die man in der Form

$$n^2 = 2m^2 \tag{2}$$

schreiben kann. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine gerade Zahl (da sie ein Vielfaches von 2 ist); daher ist die linke Seite, n^2, ebenfalls gerade. Nur eine gerade Zahl, mit sich selbst multipliziert, ergibt ein gerade Produkt; daher ist auch n gerade. Wie sieht es nun mit dem m aus, ist es ungerade oder gerade? Es kann nicht gerade sein, da n und m dann beide gerade wären und man den Bruch n/m vereinfachen könnte, indem man Zähler und Nenner durch 2 dividiert. Dies würde jedoch unserer ursprünglichen Annahme, daß n und m bereits teilerfremd sind, widersprechen. Wir müssen also annehmen, daß m ungerade ist.

Da n gerade ist, kann man n in der Form $2a$ darstellen, wobei a für eine weitere ganze Zahl steht. Wenn man für n in Gleichung (2) $2a$ einsetzt, ergibt sich

$$4a^2 = 2m^2, \tag{3}$$

das sich auf

$$2a^2 = m^2 \tag{4}$$

zurückführen läßt. Mit demselben Argument wie oben kann gezeigt werden, daß m nicht ungerade sein kann, da m^2 gleich der geraden Zahl auf der linken Seite in Gleichung (4) ist. Wir haben eben gesehen, daß m nicht gerade sein kann. Nun sehen wir, daß es auch nicht ungerade sein kann. Da jede ganze Zahl entweder gerade oder ungerade sein muß, kann m keine ganze Zahl sein. Unsere ursprüngliche Annahme muß falsch sein; es gibt also keinen ganzzahligen Bruch n/m, der gleich $\sqrt[2]{2}$ ist. Die Zahl, die wir suchen, ist irrational. Allein die Bezeichnung „irrational" reflektiert den Schock der alten Griechen über die Entdeckung solcher Zahlen. Man beachte auch, daß gezeigt wurde, daß Gleichung (2) nicht durch ganze Zahlen zu befriedigen ist. In anderen Worten: Das Quadrat einer ganzen Zahl ist niemals gleich zweimal dem Quadrat einer anderen ganzen Zahl. Auch dies ist ein wichtiges Theorem, das ohne die erstaunliche Reichweite einer einfachen Paritätskontrolle schwer zu beweisen wäre.

In jedem Zweig der Mathematik liefert eine „ungerade-gerade-Kontrolle" oft einen wirkungsvollen, kurzen Beweis. Das folgende Problem aus der Topologie ist typisch. Man zeichne eine beliebige Anzahl von Kreisen von beliebiger Größe in beliebiger Anordnung auf ein Blatt Papier. Kann eine solche „Abbildung" immer mit zwei Farben so bemalt werden, daß zwei aneinandergrenzende Gebiete niemals dieselbe Farbe aufweisen? Man kann beispielsweise beweisen, daß die Antwort positiv ist, indem man jedes Paar benachbarter Gebiete A und B betrachtet. Sie werden durch einen Kreisbogen getrennt, der Teil eines Kreises X ist. Eines der Gebiete wird innerhalb, das andere außerhalb von X sein. Abgesehen von X liegen sowohl A als auch B entweder innerhalb keines

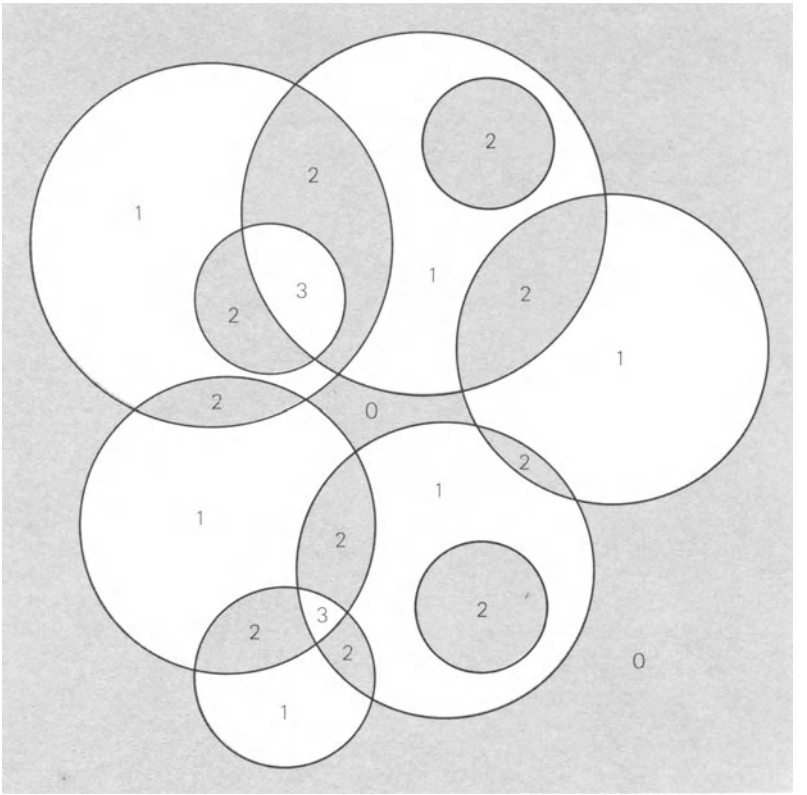


Bild 57 Ein Zweifarbenproblem

weiteren Kreises oder innerhalb derselben Anzahl von Kreisen. Daher liegt sicherlich eines der beiden Gebiete innerhalb genau eines Kreises mehr als das andere. Wenn wir jedes Gebiet mit der Zahl versehen, die angibt, innerhalb wie vieler Kreise es liegt (Bild 57), ist für jedes Paar von benachbarten Gebieten eines der Gebiete mit einer geraden, das andere mit einer ungeraden Zahl versehen. Wir färben nun die „geradzahligen" Gebiete mit der einen, die „ungeradzahligen" mit der anderen Farbe. Damit ist das Problem gelöst. (Bezüglich eines anderen Weges, um die positive Antwort zu bestätigen, vergleiche man mein Buch „Mathematische Knobeleien", Vieweg, Braunschweig, 1973, Kap. 10.)

In der Welt der Physik liegen den Dingen häufig mathematische Modelle zugrunde, für die die vertrauten Eigenschaften von ungeraden und geraden Zahlen gelten. Ein amüsantes Beispiel wird durch das folgende Gesellschaftsspiel mit drei leeren Gläsern geliefert. Man stelle die Gläser – wie im Bild 58 gezeigt – auf. Das Spiel ist folgendes: Man drehe zwei Gläser gleichzeitig um, mit jeder Hand je eines, und stelle mit drei solchen „Bewegungen" alle Gläser auf. Man gehe dabei folgendermaßen vor: Man drehe Gläser 1 und 2, dann 1 und 3 und abschließend wieder 1 und 2. Alle drei Gläser stehen dann auf-

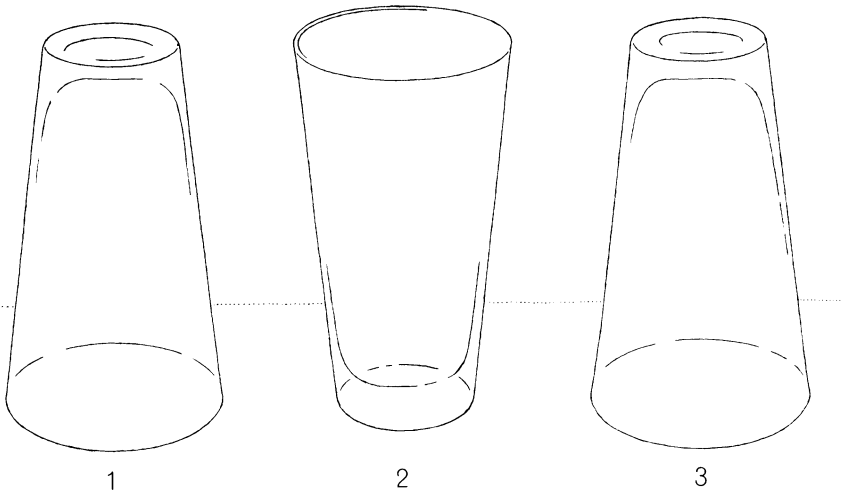


Bild 58 Aufbau für den Gläser-Trick

recht. (Natürlich kann man sie auch mit zwei Bewegungen, oder sogar mit einer, aufstellen, aber man macht es mit drei, um seine Zuschauer zu verwirren.) Nun kommt der springende Punkt. Wie beiläufig stelle man nun das mittlere Glas mit der Öffnung nach unten, die beiden äußeren mit der Öffnung nach oben und fordere jemanden auf, es selbst zu versuchen. Nur wenige Leute werden bemerken, daß die Ausgangsposition nicht mehr dieselbe wie vorhin ist. Eine einfache Paritätskontrolle zeigt, daß von dieser neuen Ausgangsstellung ausgehend das Problem nicht gelöst werden kann – auch nicht in einer beliebigen Anzahl von Schritten.

Der Beweis läuft folgendermaßen ab: Immer wenn eine gerade Zahl von Gläsern (null oder zwei) mit der Öffnung nach oben stehen, sagen wir, daß das „System" *gerade Parität* hat. Wenn eine ungerade Anzahl von Gläsern „aufrecht" steht, hat das System *ungerade Parität*. Es ist leicht einzusehen, daß das Umdrehen von zwei Gläsern die Parität des Systems nicht ändern kann. Keine beliebige Anzahl von paarweisen Drehungen wird die ursprünglich gerade Parität (zwei nach oben offen) in den gewünschten Zustand ungerader Parität (drei nach oben offen) überführen. Wenn der Zuschauer die vorgezeigten Bewegungen genau nachvollzieht, wird er alle Gläser mit der Öffnung nach unten bringen. Sollte er sie anschließend zufällig wieder „richtig" (d. h. wie im Bild 58) aufsetzen, um es von neuem zu versuchen, schreite man schnell ein und zeige noch einmal, wie es gemacht wird, um ihm schließlich wieder die „falsche" Startposition zu überlassen.

Ist es bei zehn (oder jeder beliebigen, geraden, nicht durch vier teilbaren Anzahl von) Gläsern, die abwechselnd nach oben bzw. unten offen aufgestellt werden, möglich, eine Folge von paarweisen Drehungen zu vollziehen, so daß am Ende alle Gläser nach oben bzw. unten offen sind? Nein, dies ist nicht möglich; denn in jedem Fall wäre eine unmögliche Paritätsänderung des Systems vonnöten (von, z. B. einer ungeraden fünf zu einer geraden zehn).

Solange die Gläser so freundlich sind, sich entsprechend unserer Kenntnis von ihrer Struktur zu verhalten, ist es undenkbar, daß dieses Paritätserhaltungsgesetz verletzt werden könnte. Aber die Natur, besonders im subatomaren Bereich, ist keineswegs verpflichtet, unseren Kenntnissen von der Struktur zu entsprechen. 1957 stellte sich heraus, daß ein Paritätsgesetz, das dreißig Jahre für die Wellenfunktion der Quantenmechanik Gültigkeit hatte, im Falle der schwachen Wechselwirkung von Teilchen nicht gültig ist. Die Physiker sind noch immer dabei, sich von diesem Schock zu erholen. Es war genauso, als wenn jemand dahergekommen wäre und zehn in alternierender Reihenfolge aufgestellte Gläser durch paarweise Drehungen alle nach oben offen aufgestellt hätte.

Ein unterhaltsamer Trick mit Münzen des magischen Varietes verwendet dasselbe Prinzip, das dem Gläsertrick zugrundeliegt. Man bittet jemand, eine Handvoll Münzen aus seiner Tasche zu holen und auf den Tisch zu legen. Während man sich wegdreht, ersucht man den Betreffenden, beliebig viele Münzen umzudrehen, aber immer zwei Münzen gleichzeitig. Er setzt dies solange fort, wie er will, und macht es so leise, daß man keine Ahnung hat, wie oft er Münzen umdreht. Hierauf deckt er eine Münze mit seiner Hand ab. Man dreht sich um, sieht die anderen Münzen an und kann ihm sofort sagen, ob die abgedeckte Münze Kopf oder Zahl zeigt.

Das Prinzip (von Al Thatcher in der Oktoberausgabe 1962 einer Zeitschrift für Zauberer, "The New Phoenix", erklärt) könnte nicht einfacher sein. Zu Beginn gibt eine gerade Anzahl von Köpfen eine gerade Parität an, eine ungerade Zahl eine ungerade Parität. Wenn Münzen paarweise umgedreht werden, muß die Parität erhalten bleiben. Nehmen wir beispielsweise an, daß zu Beginn fünf Köpfe aufliegen. Am Ende, wenn eine Münze verdeckt ist, muß die Parität des Systems noch immer ungerade sein. Wenn man also eine gerade Anzahl von Köpfen sieht, weiß man, daß die abgedeckte Münze Kopf zeigt. Sieht man eine ungerade Anzahl von Köpfen, so muß die abgedeckte Münze Zahl zeigen.

Zur Abwechslung lasse man einen Zuschauer zwei Münzen abdecken und sage ihm dann, ob sie zusammenpassen oder nicht. Eine andere Variante ist die, daß man ihn zuerst eine Münze umdrehen läßt, dann zwei, dann drei; diese Dreierkombination kann er so lange fortsetzen, wie er es wünscht. Da $1 + 2 + 3 = 6$ (eine gerade Zahl), wird die Parität wie zuvor erhalten bleiben.

Manchmal ist die einem System zugrundeliegende Parität so gut getarnt, daß nur der geistig regsamste Mathematiker sie erkennen kann. Ein Standardbeispiel liefert das folgende ungewöhnliche Problem aus „Unterhaltsame Mathematik", Vieweg, Braunschweig, einer brillianten Sammlung von Rätseln des deutschen Mathematikers Roland Sprague. Fünf kubische Klötze mit einem *A* auf nur einer Stirnseite werden zuerst in der im Bild 59 gezeigten Kreuzformation in der oberen linken Ecke eines Schachbrettes angeordnet. Die *A* schauen alle noch oben. Die Klötze werden nun von einem Quadrat zum nächsten bewegt, indem man sie um eine Kante dreht, ähnlich wie man eine große, schwere, kubische Schachtel bewegen würde. Mit anderen Worten, jeder Klotz wird durch eine Serie von Vierteldrehungen bewegt, wobei jede dieser Bewegungen ihn von einem Quadrat auf ein benachbartes dreht. Wenn man die Klötze auf diese Art bewegt, ist es unmöglich, sie irgendwo auf dem Schachbrett in einer Reihe anzuordnen, wobei die

A alle mit derselben Orientierung nach oben schauen. Es ist jedoch möglich, sie wie abgebildet, in einer Reihe am unteren Ende des Brettes anzuordnen. Welcher Klotz in dieser Reihe stand ursprünglich in der Mitte der Kreuzformation?

Man könnte natürlich durch einen praktischen Test herausfinden, welcher Klotz es sein muß. Aber mit dem richtigen Blick für die ungerade-gerade-Struktur des Systems kann der richtige Klotz allein durch das Studium der beiden Stellungen herausgefunden werden. Überdies liefert die Paritätskontrolle einen Beweis, den die empirische Methode nicht liefert. Der Test zeigt nur, daß der bestimmte Klotz in der Reihe der mittlere gewesen sein *könnte*; er beweist nicht, daß es kein anderer Klotz gewesen sein könnte, wenn die richtige Reihenfolge von Drehungen vollzogen worden wäre.

Einem Werk eines exzentrischen U. S. Architekten, Frank Lloyd Wrong, liegt ein vielleicht einfacheres ungerade-gerade-Problem zugrunde. Um einen reichen Auftraggeber zu ägern entwarf Wrong ein Haus, das die Form einer riesigen Schuhschachtel hatte. Es war durch Stockwerke in drei Niveaus unterteilt; in jedem Stockwerk waren durch vertikale Wände sieben rechteckige Räume entstanden. Es gab keine Vorräume, Stiegen oder Abstellkammern, keinen Keller oder Dachboden. Das Haus bestand ausschließlich aus 21 rechteckigen, schachtelförmigen Räumen.

Es gab zwei Arten von Türen im Haus:

1. Konventionelle Türen, die es ermöglichten, von einem Raum in den anschließenden zu gehen, oder von einem Zimmer im Erdgeschoß hinaus in den Garten.
2. Falltüren, die es ermöglichten, mit Hilfe von Leitern von einem Zimmer in ein direkt darüber liegendes Zimmer zu steigen.

Die Türen waren willkürlich angeordnet. Ein Raum konnte ein Dutzend oder mehr Türen haben oder auch (wie das Zimmer des „Anderen Professors" in Lewis Carrolls "Silvie and Bruno") überhaupt keine Türen. Wrong war jedoch darauf bedacht, daß jeder Raum eine gerade Anzahl von Türen hatte. (Null wird als gerade gezählt.) Die Aufgabe ist nun: zu beweisen, daß die Anzahl der vom Erdgeschoß in den Garten führenden Türen gerade ist.

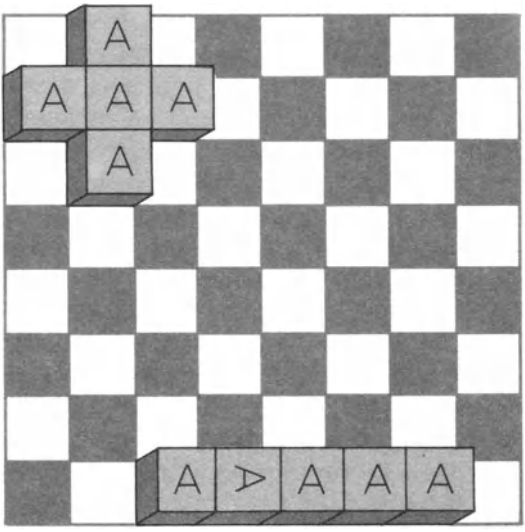


Bild 59
Ein Problem zur Paritätsanalyse

Lösungen

Welcher der fünf Klötze in der sich am Ende am Schachbrett ergebenden Reihe war der mittlere Klotz in der Ausgangsformation, bevor die Klötze durch Drehen um ihre Kanten von Quadrat zu Quadrat bewegt wurden? Wenn ein Klotz durch eine gerade Anzahl von Drehungen bewegt wurde, ist es klar, daß das Quadrat, auf dem er zu liegen kommt, dieselbe Farbe wie das Ausgangsquadrat hat. Eine ungerade Anzahl von Drehungen bringt ihn auf ein Quadrat mit der anderen Farbe. Nicht so klar ist es, welche Beziehung zwischen ungerade und gerade und der Orientierung eines Klotzes besteht.

Man stelle sich einen Klotz vor, der auf drei Seiten mit roter Farbe so bemalt ist, daß die bemalten Quadrate an einer Ecke zusammenstoßen. Weiterhin sei der Klotz so plaziert, daß man alle drei bemalten Seiten sehen kann. Im weiteren Verlauf gibt es nun vier Möglichkeiten: Man sieht keine rote Seite, eine, zwei oder drei rote Seiten. Sieht man eine oder drei rote Seiten, wollen wir sagen, daß der Klotz ungerade Parität hat; sieht man keine oder zwei rote Seiten, hat er gerade Parität. Immer wenn der Klotz eine Vierteldrehung in irgendeine Richtung macht, wechselt er dadurch sicherlich seine Parität (Bild 60). (Dies folgt aus der Tatsache, daß gegenüberliegende Seiten des Klotzes verschiedene Farben haben. Jede Vierteldrehung bringt eine Seite aus unserem Gesichtsfeld und die gegenüberliegende ins Gesichtsfeld. So ändert jede Vierteldrehung die Anzahl der sichtbaren roten Seiten immer um eins.) Stellt man sich anstelle eines Klotzes mit bemalten Seiten einen Spielwürfel vor, so wird die Parität durch die Summe der drei sichtbaren Augenzahlen bestimmt.

Da jede Bewegung dem Klotz eine Vierteldrehung erteilt, wird die Parität mit jeder Bewegung geändert. Nach einer geradzahligen Anzahl von Bewegungen liegt der Klotz wieder auf einem Quadrat derselben Farbe, die auch das Ausgangsquadrat hatte und hat wieder dieselbe Parität. Nach einer ungeradzahligen Anzahl von Bewegungen hat er sowohl Farbe des Quadrats, auf dem er zu liegen kommt, als auch seine Parität geändert. Der mittlere Klotz lag ursprünglich auf einem weißen Feld. Wenn er durch eine ungeradzahlige Anzahl von Drehungen in die Endformation gebracht wurde, wird er dort auf einem schwarzen Quadrat zu liegen kommen – seine Parität hat sich geändert. Aber alle

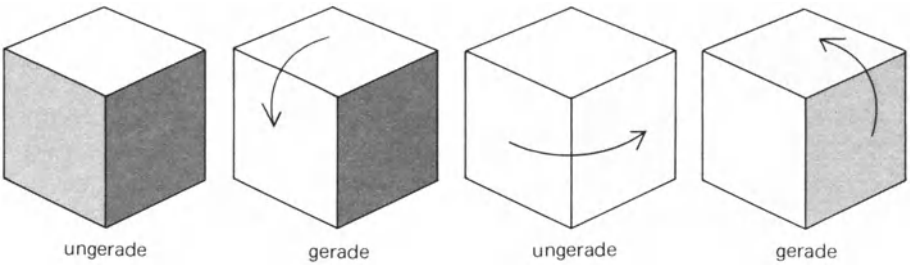


Bild 60 Wie eine Vierteldrehung die Parität eines Würfels ändert

Klötze auf den schwarzen Quadraten (in der Endformation) haben dieselbe Parität, d.h. der mittlere Klotz ist nicht unter ihnen. Daher muß er durch eine *geradzahlige* Anzahl von Bewegungen verschoben worden sein. Dies bringt ihn auf ein weißes Feld, wobei seine Parität erhalten bleibt. Von den zwei Klötzen, die in der Endstellung auf weißen Quadraten liegen, hat nur der zweite von rechts ungeänderte Parität. Darum ist dies der gesuchte Klotz.

Die Klötze können sogar willkürlich in jede Endstellung am Schachbrett gebracht werden und man kann immer den ursprünglich mittleren Klotz herausfinden. Es wird dies entweder der einzige Klotz auf dem weißen Feld mit ungeänderter Parität sein, oder aber der einzige Klotz auf einem schwarzen Feld mit geänderter Parität.

Um zu beweisen, daß Frank Lloyd Wrongs „Schachtelhaus" eine gerade Anzahl von Türen hat, die nach außen führen, betrachten wir zuerst die Tatsache, daß jede Tür zwei Seiten hat. Wenn das Haus n Türen hat, ist die Gesamtzahl von Türseiten $2n$, eine gerade Zahl. Wir wissen, daß jedes Zimmer eine gerade Anzahl von Türen hat. Man nehme nun an, daß alle Türen geschlossen sind. So wird eine gerade Anzahl von Seiten in jedes Zimmer hineinschauen und darum die Gesamtanzahl von Seiten, die in die Zimmer hineinschauen, gerade sein. Wir ziehen diese gerade Zahl von der Gesamtzahl der Türenseiten, die ebenso gerade ist, ab, und erhalten so eine weitere gerade Zahl: nämlich die Zahl der Türenseiten, die nicht in ein Zimmer hineinschauen. Diese Seiten müssen natürlich die Außenseiten derjenigen Türen sein, die nach außen führen – die Anzahl der in den Garten führenden Türen ist daher gerade.

9 Die Regelmäßigkeit der Primzahlen

Kein anderer Zweig der Zahlentheorie ist derart in Dunkel gehüllt und gleichzeitig von einer Eleganz wie die Primzahlen: jene Zahlen, denen nicht beizukommen ist, die einen zur Verzweiflung bringen, die nur durch sich selbst und 1, aber keine anderen ganzen Zahlen teilbar sind. Einige der Probleme, die die Primzahlen betreffen sind so einfach, daß auch ein Kind sie begreifen kann, aber doch so tief und noch so weit von einer Lösung entfernt, daß viele Mathematiker vermuten, es *gäbe* keine Lösung. Vielleicht hat die Zahlentheorie, genauso wie die Quantenmechanik, ihr eigenes Unbestimmtheitsprinzip, das es erforderlich macht, in manchen Gebieten die Exaktheit zugunsten einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Formulierung über Bord zu werden.

Die zentrale Schwierigkeit besteht darin, daß die Primzahlen so entlang der Zahlengeraden verteilt sind, daß die Anordnung, die man nicht zufällig nennen kann, sich bisher allen Versuchen einer exakten Beschreibung entzogen hat. Wie lautet die hunderste Primzahl? Auch der Mathematiker erhält eine Lösung nur dadurch, daß er eine Liste der Primzahlen anlegt und bis 100 zählt. Aber wie erhält man vorerst einmal die Liste? Am einfachsten ist es, alle ganzen Zahlen durchzugehen und die zusammengesetzten Zahlen (also die, die nicht Primzahlen sind) herauszustreichen. Ein Computer macht dies natürlich sehr schnell, aber immer noch im wesentlichen nach jenem einfachen Verfahren, das schon Eratosthenes, der Geograph und Astronom aus Alexandrien und Freund des Archimedes, vor zweitausend Jahren angewendet hat.

Eine gute Art, mit den Primzahlen vertraut zu werden, ist es, das *Sieb des Eratosthenes* (wie sein Verfahren genannt wird) zu benützen und alle Primzahlen kleiner hundert zu suchen. Kenneth P. Swallow von Monterey in Kalifornien hat dazu einen sehr praktischen Weg vorgeschlagen. Man schreibt die Zahlen von 1 bis 100 in rechteckiger Anordnung auf (Bild 61). Zuerst streicht man alle Vielfachen von 2, außer 2 selbst, aus, indem man in der zweiten, vierten und sechsten Spalte senkrechte Linien zieht. Die restlichen Vielfachen von 3 werden durch eine senkrechte Linie in der dritten Spalte eliminiert. Die nächste Zahl, die nicht ausgestrichen ist, ist 5. Ihre Vielfachen werden durch eine Reihe von diagonal verlaufenden Linien von rechts oben nach links unten ausgestrichen. Die restlichen Vielfachen von 7 werden durch diagonale Linien in der entgegengesetzten Richtung eliminiert. Die Zahlen 8, 9 und 10 sind zusammengesetzt: ihre Vielfachen sind schon weggestrichen worden. Unsere Arbeit ist aber auch schon beendet, weil die nächste Primzahl, 11, größer ist, als die Quadratwurzel von 100, der höchsten Zahl in unserer Tabelle. Wäre diese Zahl größer, so könnte man die höheren Vielfachen von 11 durch steilere diagonale Linien eliminieren.

Außer 26 Zahlen sind alle durch das Sieb gefallen. Diese Übriggebliebenen sind die ersten 26 Primzahlen. Mathematiker sprechen lieber von 25 Primzahlen, weil sich verschiedene wichtige Sätze einfacher formulieren lassen, wenn man 1 nicht als Primzahl bezeichnet. Zum Beispiel besagt der „fundamentale Satz der Arithmetik", daß

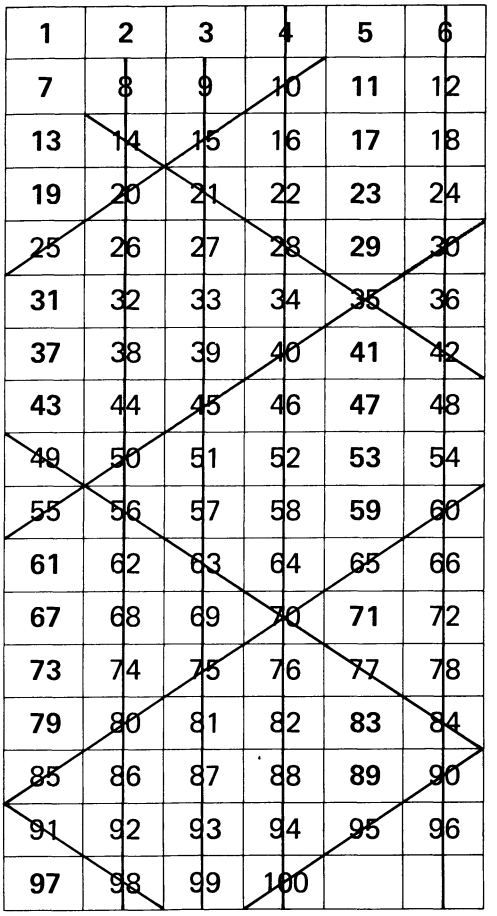


Bild 61
Das Sieb des Eratosthenes

jede Zahl größer 1 eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren besitzt. So ist etwa 100 das Produkt von vier Primzahlen: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Keine andere Menge von Primzahlen hat 100 als Produkt. Bezeichnen wir 1 auch als Primzahl, könnten wir das wie zum Beispiel $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$.

Aus Bild 61 kann man viel über Primzahlen lernen. Man sieht sofort, daß alle Primzahlen größer als drei entweder um 1 größer oder kleiner als ein Vielfaches von 6 sind. Es geht auch klar hervor, warum es so viele „Primzahlenzwillinge" gibt, Paare von Primzahlen, die sich nur um zwei unterscheiden, wie 71 und 73, 267 und 269, 1 000 000 009 649 und 1 000 000 009 651. Nachdem man alle Vielfachen von 2 und 3 eliminiert hat, bleiben *nur* Zahlenpaare übrig. Die weitere Auslese entfernt jeweils nur einen oder beide Teile eines Paares, aber viele bleiben unberührt. Primzahlenzwillinge werden immer seltener, je größer die Zahlen werden. Man nimmt an, daß immer wieder unendlich viele durch das Sieb fallen, aber man ist sich nicht sicher. Die Tabelle zeigt auch auf einen Blick, daß 3, 5, 7 das einzig mögliche Tripel von Primzahlen ist.

Ordnet man die ganzen Zahlen anders an, so ergeben sich natürlich andere geometrische Muster. Im Jahr 1963 nahm Stanislaw M. Ulam vom Los Alamos Scientific Laboratory an einer Tagung teil, in deren Verlauf er auch einen seiner Meinung nach „sehr langweiligen und sehr langen" Vortrag anhörte. Um sich die Zeit zu vertreiben, kritzelte er ein Gitter aus horizontalen und vertikalen Linien auf ein Blatt Papier. Einer ersten Regung folgend wollte er ein Schachproblem skizzieren, änderte dann aber seine Meinung und begann, die Schnittpunkte der Linien zu nummerieren; nahe der Mitte begann er mit 1 und bewegte sich in einer dem Uhrzeigersinn entgegengesetzten Spirale nach außen. Ohne besondere Absicht kreiste er alle Primzahlen ein. Zu seiner Überraschung schienen die Primzahlen die Eigenschaft zu haben, sich entlang gerader Linien anzuordnen. Bild 62 zeigt, wie die Primzahlen von 1 bis 100 sich im Spiralgitter abheben. (Der Klarheit willen sind die Zahlen in den Feldern und nicht an den Schnittpunkten angebracht.)

Am Beginn der Spirale ist diese Anordnung der Primzahlen wegen ihrer großen „Dichte" und auch, weil ja alle Primzahlen außer zwei ungerade sind, nicht so ungewöhnlich. Nummeriert man die Felder eines Damebrettes in Form einer Spirale, so sieht man, daß alle ungeraden Zahlen sich auf Feldern gleicher Farbe befinden. Nimmt man 17 Marken (die die 17 ungeraden Primzahlen kleiner als 64 darstellen) und ordnet sie beliebig auf den 32 Feldern, die ungerade Zahlen tragen, so sieht man, daß sie diagonal verlaufende Linien bilden. Aber in den höheren, weniger dichten Gebieten der Zahlenreihen würde man nicht viele solcher Linien erwarten. Wie würde das Gitter ausschauen, fragt sich Ulam, wenn man es bis auf tausend Primzahlen ausdehnte?

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

Bild 62
Ulams Spiralgitter

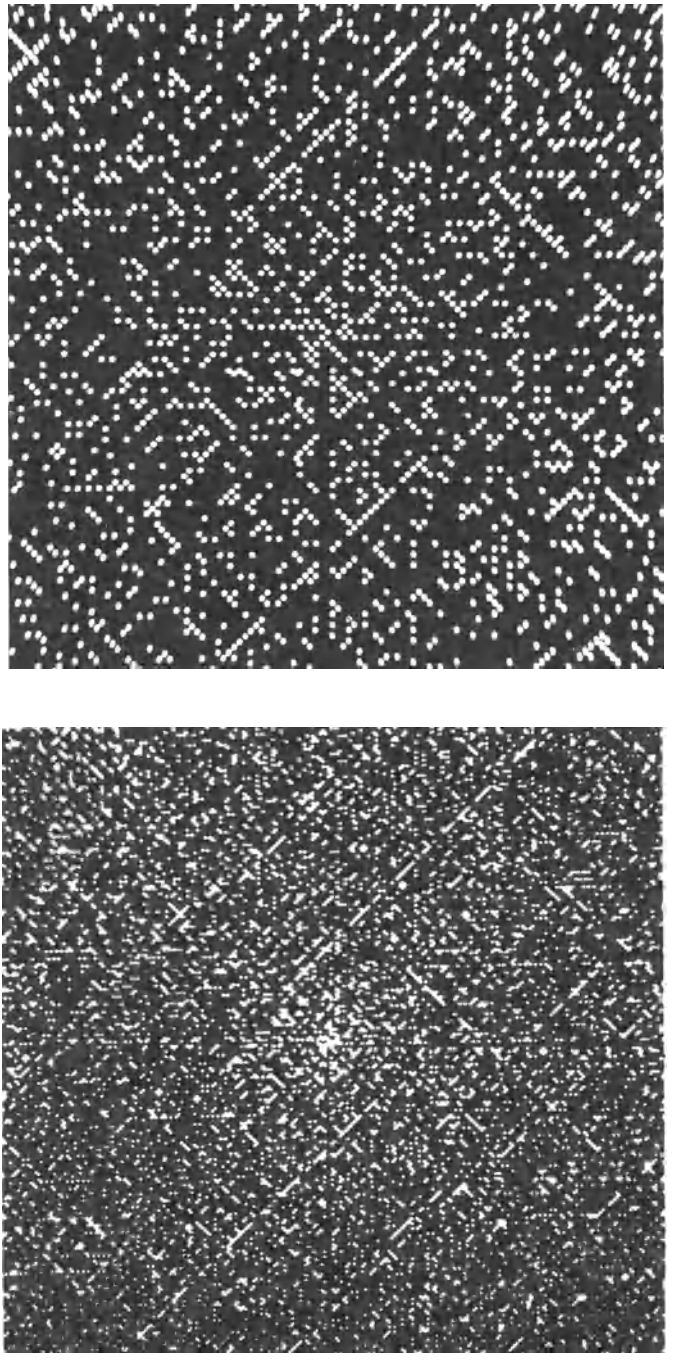


Bild 63
Photographien einer spiralförmigen Anordnung der ganzen Zahlen von 1 bis ungefähr 10 000 (oben) und von 1 bis ungefähr 65 000 (unten) durch den Computer; die Primzahlen heben sich hell gegen den dunklen Hintergrund ab.

Die Computerabteilung in Los Alamos besitzt ein Magnetband, auf dem 90 Millionen Primzahlen gespeichert sind. Zusammen mit Myron L. Stein und Mark B. Wells schrieb Ulam für den MANIAC-Computer ein Programm, das von den spiralförmig angeordneten Zahlen von 1 bis 65 000 die Primzahlen aussondern und zeigen sollte. Dieses Bild wird in Bild 63 gezeigt. Es ist zu beachten, daß sogar gegen den Rand hin die Primzahlen noch immer schön in Linien angeordnet auftreten.

Das Auge nimmt zuerst die diagonal verlaufenden zusammenhängenden Linien wahr, die durch aneinandergrenzende Zellen ungerader Zahlen entstehen, aber es läßt sich unter den Primzahlen auch deutlich eine Tendenz zu Anordnungen in horizontalen und vertikalen Linien feststellen; in diesen Linien trägt nur jede zweite Zelle eine ungerade Zahl. Eine gerade Linie in einer beliebigen Richtung (hat man sie einmal über die aufeinanderfolgenden Zahlen eines Teiles der Spirale hinaus fortgesetzt) trägt Zahlen, die sich durch quadratische Ausdrücke, beginnend mit $4x^2$, darstellen lassen. Die Folge von Primzahlen 5, 19, 41 und 71, die in einer Diagonale auftritt, läßt sich durch den Ausdruck $4x^2 + 10x + 5$ darstellen, wenn x die Werte 0 bis 3 durchläuft. Das Gitter legt nahe, daß, verteilt auf die ganze Zahlenreihe, Darstellungen dieser Art sehr unterschiedlich darin sein werden, ob sie viele oder nur wenige Primzahlen beinhalten; und daß es in ersteren Stellen mit ungewöhnlich hoher Konzentration von Primzahlen gibt.

Beginnt man die Spirale nicht mit 1 sondern mit höheren Zahlen, werden die Linien durch andere quadratische Ausdrücke dargestellt. Betrachten wir nun ein Gitter in dem die Spirale mit 17 anfängt (Bild 64, links). Die Zahlen in der Hauptdiagonale von rechts oben nach links unten werden von $4x^2 + 2x + 17$ erzeugt. Setzt man für x positive ganze Zahlen ein, so erhält man den unteren Teil der Diagonale; negative ganze Zahlen ergeben die obere Hälfte. Betrachten wir die gesamte Diagonale und ordnen die Zahlen ansteigend, so kann man erfreulicherweise feststellen, daß sich alle Zahlen durch

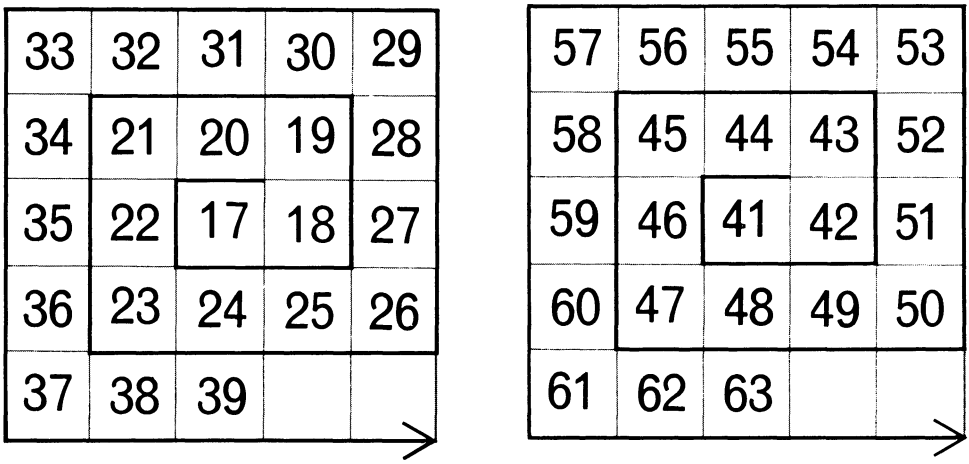


Bild 64 Die Diagonalen werden durch die Formeln $x^2 + x + 17$ (links) und $x^2 + x + 41$ (rechts) erzeugt

den einfacheren Ausdruck $x^2 + x + 17$ darstellen lassen. Dies ist eine jener Formeln, die viele Primzahlen beinhaltet und die von Leonhard Euler, dem schweizer Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts, entdeckt worden ist. Für alle Werte von x zwischen 0 und 15 erhält man Primzahlen. Für die Spirale bedeutet dies folgendes: wir können in unserem Bild das Quadrat auf 16 mal 16 vergrößern und die gesamte Diagonale besteht weiterhin nur aus Primzahlen.

Eulers bekanntestes Polynom, das Primzahlen erzeugt, $x^2 + x + 41$, läßt sich auf ähnliche Art und Weise in einem Gitter darstellen, nur beginnt in diesem Fall die Spirale mit 41 (Bild 64, rechts). Dieses Polynom erzeugt in ununterbrochener Reihenfolge 40 Primzahlen, die die Hauptdiagonale eines 40 mal 40 Quadrates füllen! Es ist schon lange bekannt, daß von den ersten 2398 Zahlen, die durch diesen Ausdruck erzeugt werden, genau die Hälfte Primzahlen sind. Nachdem Ulam, Stein und Wells alle derartigen Zahlen bis 10 000 000 getestet hatten, fanden sie, daß der Anteil der Primzahlen nur 0,475 ... sei. Die Mathematiker hätten gern eine Formel, eine Funktion von n, die für jeden ganzzahligen Wert von n eine Primzahl ergeben würde. Es ist bereits bewiesen worden, daß es kein Polynom dieser Art gibt. Es gibt jedoch viele, nichtpolynomische Formeln, die nur Primzahlen erzeugen; diese Formeln sind aber zum Berechnen von Primzahlen nicht geeignet, weil man, um diese Formeln überhaupt aufstellen zu können, die Primzahlen zuerst kennen muß. (Vergleiche Underwood Dudley, "History of a Formula for Primes", in "The American Mathematical Monthly", Januar 1969.)

Ulams Spiralgitter haben den Spekulationen über die rätselhafte Mischung von Ordnung und Zufall in der Verteilung der Primzahlen noch einen Hauch der Phantasie hinzugefügt. Gibt es in solchen Gittern Linien, die unendlich viele Primzahlen enthalten? Wie groß ist die maximale Dichte von Primzahlen auf einer Linie? Gibt es in einem unendlich großen Raster Schwankungen der Dichte zwischen unterer und oberer Hälfte, zwischen links und rechts, zwischen den vier Vierteln? Man sollte Ulams Spielereien, die zwar nicht ganz mathematisch sind, trotzdem ernst nehmen. Schließlich stammen auch jene Vorschläge von ihm, die ihn und Edward Teller zu jener „Idee" brachten, die zur ersten thermonuklearen Bombe führte.

Obwohl mit ansteigenden Zahlen die Häufigkeit der Primzahlen immer geringer wird, gibt es dennoch keine größte Primzahl. Es ist schon von Euler exakt und sehr schön bewiesen worden, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Durch das strenge Ausleseverfahren konnte man natürlich denken, daß leicht eine Formel zu finden sein müßte, die für ein gegebenes Intervall der Zahlengeraden die exakte Anzahl der Primzahlen liefert. Es ist jedoch keine solche Formel bekannt. Im frühen neunzehnten Jahrhundert stellten einige Mathematiker auf Grund von Erfahrungswerten folgende Formel auf: Die Anzahl der Primzahlen bis zu einer bestimmten Zahl n sei ungefähr n/natürlicher Logarithmus von n und meinten, daß diese Näherungsformel mit größer werdendem n immer genauer wird. Im Jahre 1869 wurde dieser bemerkenswerte Satz, der als „Primzahlensatz" bekannt ist, streng bewiesen. (Vergleiche David Hawkins "Mathematical Sieves", in "Scientific American", Dezember 1958; dort findet sich eine Besprechung dieses Satzes und seiner Anwendung auf andere Zahlenarten, wie die von Ulam erfundenen „glücklichen Zahlen".)

Es ist nicht einfach, jene riesigen Primzahlen zu finden, die sich isoliert in ungeheuren Wüsten von zusammengesetzten Zahlen befinden, die immer größere Abschnitte der Zahlenreihen in Anspruch nehmen. Momentan ist $2^{19937} - 1$ die größte bekannte Primzahl; eine Zahl, die aus 6002 Ziffern besteht. Sie wurde 1971 von Bryant Tuckerman im IBM-Forschungszentrum in Yorktown Heights, New York, gefunden. Vor der Entwicklung der Computer bedeutete oft schon das Durchprobieren sechs- oder siebenstelliger Zahlen wochenlange, mühsame Rechenarbeit. Euler behauptete einmal, daß 1 000 009 eine Primzahl sei, entdeckte aber später, daß sie das Produkt zweier Primzahlen ist, nämlich von 293 und 3413. Man bedenke, welch eine großartige Leistung dies war; war Euler doch schon siebzig Jahre alt und blind. Pierre Fermat wurde einmal gefragt, ob 100 895 598 169 eine Primzahl sei. Fermat wußte sofort eine Antwort! Sie sei das Produkt der Primzahlen 898 423 und 112 303. Solche Leistungen lassen uns denken, daß die alten Meister vielleicht geheime, nun vergessene Methoden der Faktorzerlegung kannten. Noch im Jahr 1874 konnte W. Stanley Jevons in seinen "Principles of Science" fragen: „Kann der Leser herausfinden, welche zwei Zahlen man multiplizieren muß, um 8 616 460 799 zu erhalten? Ich halte es für unwahrscheinlich, daß dies jemals jemand außer mir selbst wissen wird; es sind nämlich zwei große Primzahlen." Jevons, der selbst eine mechanische logische Maschine erfunden hatte, hätte klüger sein sollen, als der zukünftigen Entwicklung so eine Begrenzung vorauszusagen. Heute kann ein Computer seine zwei Primzahlen (96 079 und 89 681) schneller finden als er sie ausmultiplizieren konnte.

Zahlen der Form $2^p - 1$, wobei p eine Primzahl ist, werden nach dem Pariser Mönch Marin Mersenne, der im siebzehnten Jahrhundert lebte, Mersennsche Zahlen genannt (er gehörte einem einfachen Orden an, was für einen Mathematiker angebracht erscheint). Dieser wies als erster darauf hin, daß viele Zahlen dieser Form Primzahlen sind. Ungefähr 200 Jahre lang glaubte man, die Mersennsche Zahl $2^{67} - 1$ sei eine Primzahl. In seinem Buch "Mathematics, Queen and Servant of Science" erinnert sich Eric Temole an eine Tagung der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft in New York im Oktober 1903, auf der Professor Frank Nelson Cole von der Universität Columbia einen Vortrag halten sollte. „Cole – der immer ein schweigsamer Mann gewesen war – erhob sich, schritt zur Tafel und begann, ohne ein Wort zu sagen, die siebenundsechzigste Potenz von 2 auszurechnen. Dann zog er sorgfältig 1 ab. Auf einem anderen Teil der Tafel rechnete er dann, immer noch ohne etwas zu sagen

$$193\,707\,721 \cdot 761\,838\,257\,287$$

aus. Die zwei Ergebnisse stimmten überein. ... Damals geschah es zum ersten und einzigen Mal, daß die Amerikanische Mathematische Gesellschaft einem Vortragenden kräftig applaudierte. Cole ging wieder zu seinem Platz zurück ohne ein Wort gesprochen zu haben. Niemand stellte an ihn eine Frage." Jahre später fragte Bell Cole, wie lange er zum Ermitteln der Zahlen gebraucht habe, und dieser antwortete: „Die Sonntage dreier Jahre."

Der englische Rätselexperte Henry Ernest Dudeney wies in seinem ersten Rätselbuch ("The Canterbury Puzzles", 1907) darauf hin, daß 11 die einzige Primzahl sei, die nur aus Einsen bestehe. (Jede andere Ziffer würde bei ihrer Aneinanderreihung natür-

lich nie eine Primzahl ergeben.) Es gelang ihm zu zeigen, daß alle solchen Zahlen (repunit numbers), die aus 3 bis 18 Ziffern bestehen, keine Primzahlen sind. Gibt es längere solche Ketten, die Primzahlen darstellen? Oscar Hope, ein New Yorker, der Dudeneys Buch gelesen hatte, nahm die Herausforderung an und es gelang ihm tatsächlich im Jahr 1918 zu zeigen, daß die aus 19 Ziffern bestehende Zahl 1 111 111 111 111 111 111 eine Primzahl sei. Später wurde entdeckt, daß 23 Einsen ebenfalls eine Primzahl bilden. Weiter ist man nicht gekommen. Niemand weiß, ob es unendlich viele Primzahlen dieser Art gibt, ja nicht einmal, ob es mehr als drei gibt. Es ist leicht einzusehen, daß eine solche Zahl nur dann eine Primzahl sein kann, wenn die Anzahl ihrer Ziffern ebenfalls eine ist. (Hat die Anzahl ihrer Ziffern einen Teiler, etwa 13, dann ist die Zahl offensichtlich durch eine solche „Wiederholungszahl" aus 13 Ziffern teilbar.) Bis zum Jahr 1970 hat man diese „Wiederholungszahlen" bis auf 373 Stellen untersucht ohne eine vierte Primzahl zu finden.

Kann man ein magisches Quadrat ausschließlich aus verschiedenen Primzahlen konstruieren? Die Antwort ist ja; Dudeney hat dies als erster getan. Bild 65 zeigt ein solches Quadrat. Die Quersumme in jeder Richtung ist die „Wiederholungszahl" 111: die minimale Konstante für ein Primzahlquadrat dritter Ordnung. (Eigenartigerweise gibt es ein Quadrat vierter Ordnung mit einer kleineren magischen Konstanten, nämlich 102. Vergleiche Dudeneys "Amusements in Mathematics", New York: Dover, 1917; Aufgabe 408.)

Ist es möglich, ein magisches Quadrat aus *aufeinanderfolgenden*, ungeraden Primzahlen zusammenzusetzen? (Die gerade Primzahl zwei darf nicht verwendet werden, weil sonst die Summe der Reihen bzw. Spalten in denen sie vorkommt bezüglich der Geradheit oder Ungeradheit immer entgegengesetzt zu den anderen Summen sein würde; auf diese Weise ließe sich nie ein magisches Quadrat bilden.) Im Jahr 1913 bewies J. N. Muncey von Jessup, Iowa, daß das kleinste solche Quadrat eines zwölfter Ordnung ist.

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Bild 65
Magisches Primzahlquadrat dritter Ordnung mit minimaler Konstanter

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Bild 66 Das kleinstmögliche magische Quadrat aus aufeinanderfolgenden ungeraden Primzahlen

Diese beachtliche Rarität ist so wenig bekannt, daß ich das Quadrat im Bild 66 abdrucken will. Seine Felder beinhalten die ersten 144 aufeinanderfolgenden Primzahlen, beginnend mit 1. Die Summe aller Reihen, Spalten und der Hauptdiagonalen beträgt 4514.

Der Leser kann nun seine Vertrautheit mit Primzahlen bei der Beantwortung folgender Fragen überprüfen:

1. Unter den folgenden fünf Zahlen sind die vier Primzahlen herauszufinden. (*Hinweis*: die zweite Zahl besteht aus den fünf ersten Dezimalstellen der Zahl π.

   10 001
   14 159
   76 543
   77 377
   123 456 789
   909 090 909 090 909 090 909 090 909 091

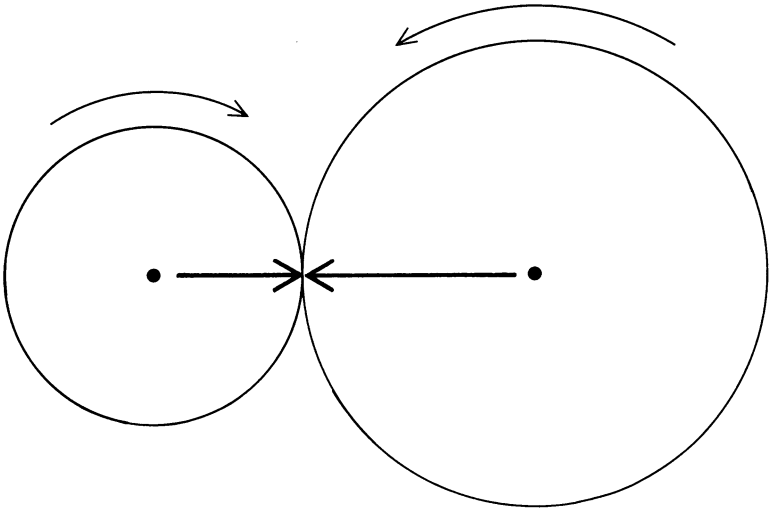


Bild 67 Problem mit Zahnrädern

2. Zwei Zahnräder, von denen jedes mit einem Pfeil markiert ist, greifen so ineinander, wie es aus Bild 67 hervorgeht. Das kleinere Rad bewegt sich im Uhrzeigersinn bis die zwei Pfeile wieder direkt zueinander zeigen. Wie viele Umdrehungen muß das kleinere Rad machen, falls das größere 181 Zähne hat? (Diese Aufgabe stammt von Burris Smith aus Greenville, Mississippi.)
3. Man soll drei Primzahlen mit minimaler Summe bilden, wobei man jede der neun Ziffern genau einmal verwendet. Die Zahlen 941, 827 und 635 ergeben 2421, erfüllen aber die Minimalitätsbedingung nicht.
4. Von den folgenden Zahlen ist die einzige Nichtprimzahl herauszustreichen:
   31 331 3331 33331 333331 3333331 33333331 333333331.
5. Gesucht sind eine Million aufeinanderfolgende ganze Zahlen, unter denen sich nicht eine einzige Primzahl findet.

Anhang

Viele Leser von "Scientific American" haben die ganzen Zahlen in Dreiecken oder Sechsecken angeordnet und bei diesen Versuchen herausgefunden, daß sich die Primzahlen, ebenso wie bei Stanislaw Ulams spiralförmiger Anordnung in einem Quadrat, entlang gerader Linien häufen. Laurence M. Klauber von San Diego, Kalifornien, sandte mir die Abschrift eines Vortrages, den er bei einer Tagung der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft im Jahr 1932 gehalten hatte, in dem er über seine Suche von primzahlreichen Polynomen für solche Anordnungen berichtete. Auch Ulam benützte den Computer in Los Alamos, um andere Arten von Anordnungen, darunter auch die

in Dreiecksform zu untersuchen und stellte fest, daß eine signifikante Abweichung der Primzahlen von zufälligen Verteilungen in jedem einzelnen Fall sofort klar war. Dies ist nicht erstaunlich, weil eine systematische Anordnung der ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge immer gerade Linien ergibt, die von Polynomen erzeugt werden. Läßt sich ein solches Polynom noch faktorisieren, so kann diese Linie keine Primzahlen enthalten; dieses Tatsache allein würde schon genügen, eine Konzentration der Primzahlen auf bestimmten anderen Linien zu erklären.

Alle Diagonalen, die aus geraden Zahlen bestehen, enthalten natürlich keine Primzahlen und weitere Linien sind deshalb primzahlfrei, weil sie durch andere Zahlen teilbar sind. Viele Leser haben bemerkt, daß die Diagonale in Ulams Spirale, die sich von 1 nach rechts unten fortsetzt, in der entsprechenden Reihenfolge die Quadrate der ungeraden Zahlen enthält; eine andere Diagonale wieder, und zwar die von 4 nach links oben, enthält die Quadrate der ganzen Zahlen. In beiden Diagonalen sind natürlich keine Primzahlen vorhanden. Andererseits gibt es in manchen Linien viele Primzahlen, weil sie von Ausdrücken erzeugt werden, die wie ein Sieb jene Zahlen, die Vielfache niedriger Primzahlen sind, eliminieren. Die Bedeutung von Ulams Spirale liegt nicht in der Entdeckung, daß die Primzahlen nicht rein zufällig verteilt sind – dies ist bei einer systematischen Anordnung der ganzen Zahlen zu erwarten – sondern in der Verwendung des Computers und des Umfanges der Spirale; photographiert man diese aus der Vogelperspektive, erhält man ein Bild, dem man vielleicht Hinweise entnehmen kann, die zu neuen Sätzen führen.

Einige Leser haben meine Aufmerksamkeit auch auf W. H. Mills' Formel im "Bulletin of the American Mathematical Society" vom Juni 1947, Seite 604, gelenkt; diese Formel enthält eine irrationale Zahl zwischen 1 und 2. Setzt man für n positive ganze Zahlen ein, erhält man Primzahlen; da aber die irrationale Zahl nicht bekannt ist, ist die Formel zur Errechnung von Primzahlen wertlos. Tatsächlich ist es sehr leicht, irrationale Zahlen anzuschreiben, die alle der Reihe nach Primzahlen erzeugen, zum Beispiel 0, 20305070110130 170190230 ... Um aber sicher zu gehen, muß man die Folge der Primzahlen schon kennen, bevor man die Zahl berechnet. Es gibt viele Beispiele für komplizierte Funktionen von n, die für ganzzahlige n unterschiedliche Primzahlen ergeben, aber der Haken an der Sache ist, daß die Funktion die Kenntnis der Folge der Primzahlen voraussetzt und daher für das Errechnen neuer Primzahlen unbrauchbar ist. Eine nicht nur rein fachliche Besprechung solcher Formeln findet sich in Oystein Ores empfehlenswertem Buch "Number Theory and Its History" (New York: McGraw-Hill, 1948).

Lösungen

1. Von den gegebenen Zahlen sind die folgenden zwei keine Primzahlen: 10 001 ist das Produkt der Primzahlen 73 und 137 und 123 456 789 ist durch drei teilbar.
2. Zwei ineinandergreifende Zahnräder können nur dann wieder in ihre Ausgangsposition zurückkommen, wenn eine bestimmte Anzahl von Zähnen, k, an der Berührungsstelle beider Räder vorbeigekommen ist. Die Zahl k ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Anzahl der Zähne an jedem der beiden Räder. Es sei n

die Anzahl der Zähne des kleineren Rades. Wir wissen, daß das größere Rad 181 Zähne hat. Da 181 eine Primzahl ist, ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 181 und n $181n$. Das kleinere Rad muß deshalb 181 Umdrehungen machen, bis die zwei Räder wieder ihre Ausgangsposition erreichen.

3. Wie kann man die Ziffern von eins bis neun so zu drei Primzahlen zusammenfassen, daß deren Summe minimal ist? Wir versuchen es zuerst mit drei dreiziffrigen Zahlen. Die Einerziffern müssen 1, 3, 7 oder 9 sein (dies gilt für alle Primzahlen, die größer als 5 sind). Wir wählen die letzten drei und heben 1 auf für eine Hunderterziffer. Für die kleinstmöglichen Hunderterziffern stehen nun 1, 2 und 4 zur Verfügung und für die Zehnerziffern bleiben 5, 6 und 8 übrig. Unter den 11 möglichen dreiziffzigen Primzahlen, die diesen Bedingungen genügen, gibt es keine drei, in denen jede der ersten neun Ziffern nur einmal vorkommt. Als nächstes betrachten wir daher 1, 2 und 5 als Hunderterziffern. Dies ergibt die eindeutige Lösung

149
263
587
999

4. Die letzte Zahl, 333333331, ist durch 17 teilbar. (Diese Aufgabe basiert auf einem von dem Polen Andrzej Makowski erzielten Ergebnis, über das im "Recreational Mathematics Magazine" vom Februar 1962 berichtet wurde.)

5. Es ist nicht schwer, ein beliebig großes Intervall aufeinanderfolgender Zahlen zu finden, in dem keine Primzahlen auftreten. Um ein Intervall mit einer Million ganzer Zahlen zu erhalten, betrachten wir zuerst die Zahl 1 000 001! Das Rufzeichen bedeutet 1 000 001 Fakultät, also das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1\,000\,001$. Die erste Zahl des Intervalls, das wir suchen ist 1 000 001! + 2. Wir wissen, daß 1 000 001! durch 2 teilbar ist (einem der Faktoren), und falls wir nun 2 addieren, muß das Ergebnis wieder durch 2 teilbar sein. Die zweite Zahl unseres Intervalls ist 1 000 001! + 3. Diese Zahl ist wiederum durch 3 teilbar, weil 3 einer der Faktoren von 1 000 001! ist und wir dann nur mehr 3 addieren. Analoges gilt für 1 000 001! + 4 usw. bis 1 000 001! + 1 000 001. So erhalten wir eine Million aufeinanderfolgende Zahlen, die keine Primzahlen enthält.
Sind dies die kleinsten Zahlen, die das Problem lösen? Wie Ted L. Powell in "The Graham Dial", April 1960, herausstrich, ist die Antwort nein. Wir können eine niedrigere Folge erhalten, indem wir zum Beispiel *subtrahieren*: 1 000 001! - 2, 1 000 001! - 3 usw. bis 1 000 001! - 1 000 001.

10 Graphentheorie

Ein Ingenieur zeichnet ein Diagramm eines elektrischen Verteilungsnetzes. Ein Chemiker entwirft eine Skizze um zu veranschaulichen, wie die Atome eines komplexen Moleküles durch chemische Bindungen aneinandergereiht sind. Ein Genealoge zeichnet einen komplizierten Familienstammbaum. Ein General entwirft einen Plan für die Nachschublinien. Ein Soziologe verfolgt in einem kunstvoll angelegten Diagramm die Machtstruktur eines gigantischen Unternehmens.

Was ist all diesen Strukturen gemeinsam? Es gibt Knotenpunkte (die elektrische Anschlüsse, Atome, Menschen, Städte usw. darstellen), die durch Linien verbunden sind. In den dreißiger Jahren unseres Jahrhunderts studierte der Mathematiker Dénes König solche Strukturen zum ersten Male systematisch und gab ihnen den allgemeinen Namen „Graphen". (Eine Verwechslung dieses Ausdrucks mit den „Graphen" oder „Schaubildern" der analytischen Geometrie ist zwar möglich, aber diese Bezeichnung hat sich nun einmal eingebürgert.) Heute ist die Graphentheorie ein integrierter Zweig mathematischer Forschung. Üblicherweise betrachtet man sie als ein Teilgebiet der Topologie (weil in den meisten Fällen nur die topologischen Eigenschaften der Graphen untersucht werden), obwohl sie auch mit vielen anderen Disziplienen, wie der Mengenlehre, der Kombinatorik, der Algebra, der Geometrie, der Matrizenrechnung, der Spieltheorie, der Logistik und vielen anderen Gemeinsamkeiten aufweist.

Königs bahnbrechendes Buch über Graphen (das 1936 in Leipzig erschien) ist noch nicht ins Englische übersetzt worden, aber es gibt eine Übersetzung eines französischen Buches, "The Theory of Graphs and Its Applications", von Claude Berge, die 1962 in England erschien. Oystein Ores grundlegende Einführung "Graphs and Their Uses" wurde als Taschenbuch herausgegeben (New York: Random House, 1963). Beide Bücher sind auch für Freunde mathematischer Rätsel von großem Interesse. Hunderte bekannter Rätsel, die anscheinend nichts mit Graphentheorie zu tun haben, lassen sich doch in diese einordnen. In diesem Kapitel wollen wir uns auf planare Graphen beschränken.

Ein planarer Graph besteht aus einer Menge von Punkten, sogenannte Knotenpunkte, die durch Linien verbunden sind, die Kanten genannt werden; außerdem muß es möglich sein, den Graph in der Ebene zu zeichnen ohne daß sich die Kanten überschneiden. Man muß sich vorstellen, daß die Kanten elastisch sind und beliebig gedehnt, verkürzt und gebogen werden können. Ist der Graph im Bild 68 planar? (Seine vier Knotenpunkte sind durch Punkte dargestellt. Der Kreuzungspunkt in der Mitte ist kein Knotenpunkt; man muß sich vorstellen, daß eine Kante die andere kreuzt.) Die Antwort ist ja, weil wir die Kreuzung leicht umgehen können, indem wir, wie beim mittleren Graphen, die Lage des Knotenpunktes verändern, oder indem wir die Kante dehnen, wie im rechten Bild. Alle drei Diagramme sind isomorph: Jedes stellt auf eine andere Art und Weise *denselben* planaren Graphen dar. Die Kanten eines massiven Polyeders, wie etwa des

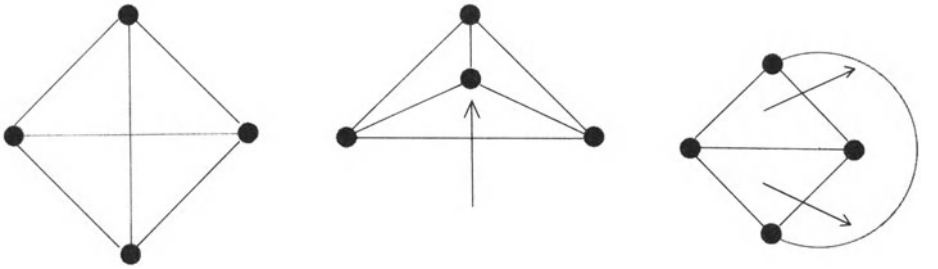


Bild 68 Drei Möglichkeiten für einen vollständigen Graphen mit vier Knotenpunkten

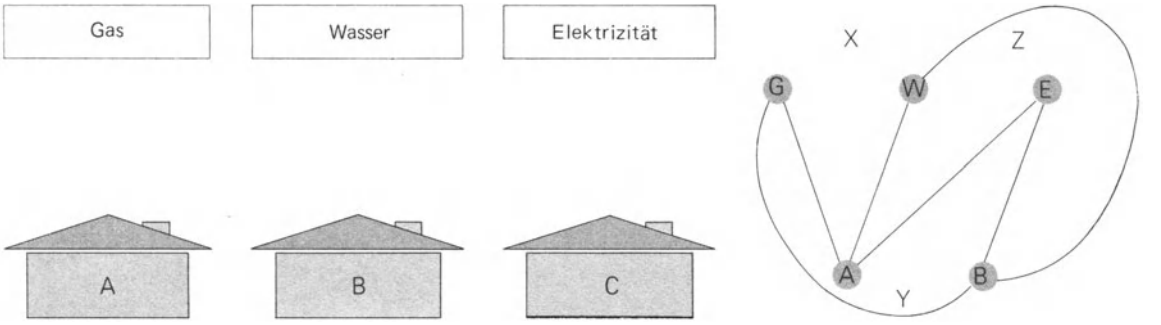


Bild 69 Das Versorgungsproblem mit Gas, Wasser und Strom (links) und der dazugehörige Unmöglichkeitsbeweis (rechts)

Würfels, sind planare Graphen, weil wir das „Skelett" des Körpers immer so dehnen können, daß es ohne Kreuzungen in der Ebene liegt. Das Skelett eines Tetraeders ist zu den drei Graphen im Bild 68 isomorph.

Es ist nicht immer einfach zu entscheiden, ob ein gegebener Graph planar ist. Man betrachte etwa jenes Problem, das im Bild 69 links abgebildet ist, eines der ältesten und frustrierendsten aller topologischen Nüsse. Seit es der englische Rätselexperte Henry Ernest Dudeney 1917 so formulierte, ist es als „Versorgungsproblem" bekannt. Jedes Haus braucht Gas, Wasser und Strom. Ist es nun möglich, jedes Haus mit jeder Versorgungsquelle durch eine Linie zu verbinden, ohne daß diese sich kreuzen? Anders gefragt: Ist der entstehende Graph planar?

Die Antwort ist nein, und es ist nicht schwer, einen Plausibilitätsbeweis zu führen. Zuerst verbindet man nur die Häuser *A* und *B* mit Gas, Wasser und Strom. Um dies durchzuführen, ohne daß sich die Linien kreuzen, zerlegt man die Ebene in drei Gebiete; dies

geht aus Bild 69, rechts, hervor. Die Linien müssen nicht genauso wie im Bild verlaufen, aber der Graph wird immer zu dem gezeigten isomorph sein. Haus C muß in einem der drei Gebiete liegen. Liegt es im Gebiet X, ist es vom Strom abgeschnitten. In Y ist es vom Wasser abgeschnitten, in Z vom Gas. Derselbe Gedankengang gilt, falls der Graph auf einer Kugel gezeichnet ist, nicht aber auf bestimmten anderen Flächen. Auf einem Torus zum Beispiel läßt sich der Graph leicht ohne Kreuzungen zeichnen.

Falls jeder Knotenpunkt eines Graphen mit allen anderen Knotenpunkten verbunden ist, heißt dieser Graph „vollständig". Aus Bild 68 erkennen wir, daß der vollständige Graph mit vier Knotenpunkten planar ist. Ist auch der vollständige Graph mit fünf Knotenpunkten planar? Wiederum zeigt ein formal nicht ganz exakter Beweis (den wir dem Leser überlassen), daß dies nicht so ist. Der Beweis ist äquivalent zu jenem, der zeigt, da es unmöglich ist, fünf Gebiete, die paarweise eine gemeinsame Grenze besitzen zu zeichnen; dieser Beweis wird oft mit dem berühmten Vierfarbenproblem verwechselt. Die zwei einfachsten, nichtplanaren Graphen zeigt Bild 70. Links ist der „Versorgungsgraph" (bekannt als der Thomsen Graph), rechts der vollständige Graph mit fünf Knotenpunkten.

Die Tatsache, daß ein vollständiger Graph nur dann planar sein kann, wenn er höchstens vier Knotenpunkte besitzt, ist nicht ohne philosophische Bedeutung. Viele Philosophen und Mathematiker haben schon nach der Antwort gesucht, warum der Raum, in dem wir leben, gerade dreidimensional ist. In seinem Buch "The Structure and Evolution of the Universe" (New York: Harper Torchbooks, 1959) argumentiert der britische Kosmologe G. J. Withrow folgendermaßen: Das intelligenzbegabte Leben, so wie wir es kennen, hätte sich in einem Raum von *mehr* als drei Dimensionen deshalb nicht entwickeln können, weil solche Räume keine stabilen Planetenbahnen rund um eine Sonne erlauben. Und wie steht es mit ein- oder zweidimensionalen Räumen? In-

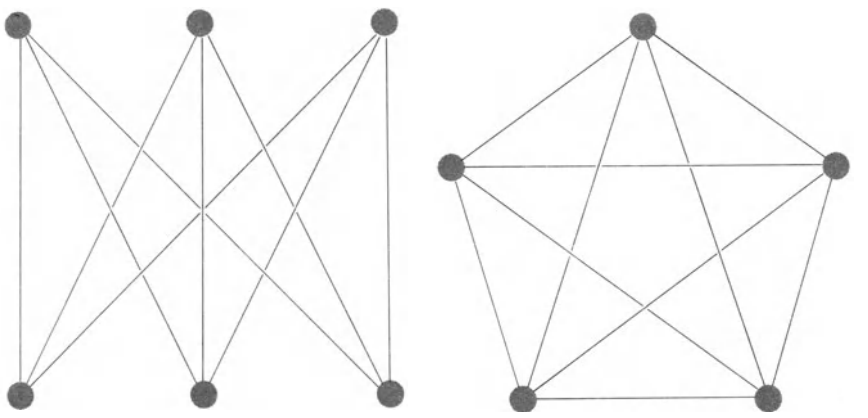


Bild 70 Die einfachsten nichtplanbaren Graphen

telligente ein- oder zweidimensionale Lebewesen werden schon durch die Graphentheorie ausgeschlossen, meint Withrow. Ein Gehirn besteht aus einer riesigen Anzahl von Nervenzellen (Knotenpunkten), die paarweise durch Nerven (Kanten) verbunden sind. Im dreidimensionalen Raum gibt es keine obere Grenze für die Anzahl der Zellen, die man auf diese Weise verbinden kann; in der Ebene jedoch wäre die maximale Anzahl, wie wir gesehen haben, vier.

„Deshalb", schreibt Withrow, „dürfen wir schließen, daß die Anzahl der Dimensionen, die für unseren Lebensraum notwendig sind, drei ist, nicht mehr und nicht weniger. Dies ist nämlich eine notwendige Begleiterscheinung der Entwicklung von höherorganisiertem Leben auf der Erde, insbesondere des Menschen, *der das Problem erst formuliert hat.*"

Einen planaren Graphen zu finden, ist eine der Grundaufgaben vieler Teilgebiete der Technik. Integrierte Schaltkreise etwa schließen kurz, falls sich irgendwelche Wege kreuzen. Der Leser möchte vielleicht sein Geschick im Konstruieren planarer Graphen an einer der beiden Aufgaben mit integrierten Schaltkreisen (Bild 71) überprüfen. In der oberen Aufgabe sind durch fünf sich nicht kreuzende Linien innerhalb des Rechteckts alle Paare von Punkten zu verbinden, die den gleichen Buchstaben tragen (*A* mit *A*, *B* mit *B* usw.) Die zwei Linien *AD* und *BC* stellen Hindernisse dar, die nicht gekreuzt werden dürfen. Im unteren Problem sind fünf Linien zu zeichnen – die wie zuvor mit gleichen Buchstaben bezeichnete Punktepaare verbinden – die dem vorgegebenen Gitter folgen müssen. Kreuzungen sind natürlich nicht erlaubt. Die Lösung ist eindeutig. Eine andere, wohlbekannte Art von Wegproblem ist die, einen vorgegebenen planaren Graphen nachzuzeichnen, ohne den Bleistift vom Papier zu nehmen und ohne eine Kante zweimal zu passieren. Läßt sich so eine Linie als geschlossener Weg ziehen – man kehrt also zu dem Knotenpunkt zurück, bei dem man angefangen hat – dann spricht man von einem Eulerschen Graphen; die Linie heißt Eulersche Linie. Im Jahr 1736 löste der schweizer Mathematiker Leonhard Euler das berühmte Problem mit den sieben Brücken der ostpreußischen Stadt Königsberg, die heute Kaliningrad heißt. Ist es möglich, jede Brücke genau einmal zu überqueren und wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückzukehren? Euler entdeckte, daß dieses Problem mit demjenigen, einen schlichten Graphen zu zeichnen, identisch ist. In der ersten Abhandlung, die je über Graphentheorie geschrieben worden ist, zeigte er folgendes: Falls jeder Knotenpunkt eine geradzahlige Valenz besitzt (d. h., daß sich eine gerade Anzahl von Kanten dort trifft), ist ein Rundgang möglich. Falls es zwei Knotenpunkte mit ungeradzahliger Valenz gibt, so ist dies nicht möglich. Man kann jedoch den Graphen mit einer Linie nachziehen, die an dem einen ungeradzahligen Knotenpunkt beginnt und am anderen endet. Gibt es $2k$ Knotenpunkte von ungeradzahliger Valenz (die Anzahl der ungeradzahligen Knotenpunkte muß immer gerade sein), so läßt sich der Graph mit k verschiedenen Wegen nachzeichnen, von denen jeder an einem ungeradzahligen Knotenpunkt beginnt bzw. endet. Der Graph für die Brücken von Königsberg beinhaltet vier ungeradzahlige Knotenpunkte und man benötigt daher ein Minimum von zwei verschiedenen Wegen (von denen keiner geschlossen ist), um alle Kanten zu begehen. Jeder Eulersche Graph läßt sich durch eine Eulersche Linie nachzeichnen, die alle Kanten einschließt und sich nie selbst kreuzt. Wie wir in der Biographie seines Neffen erfahren, machte es Lewis Carroll Spaß, kleine Mädchen

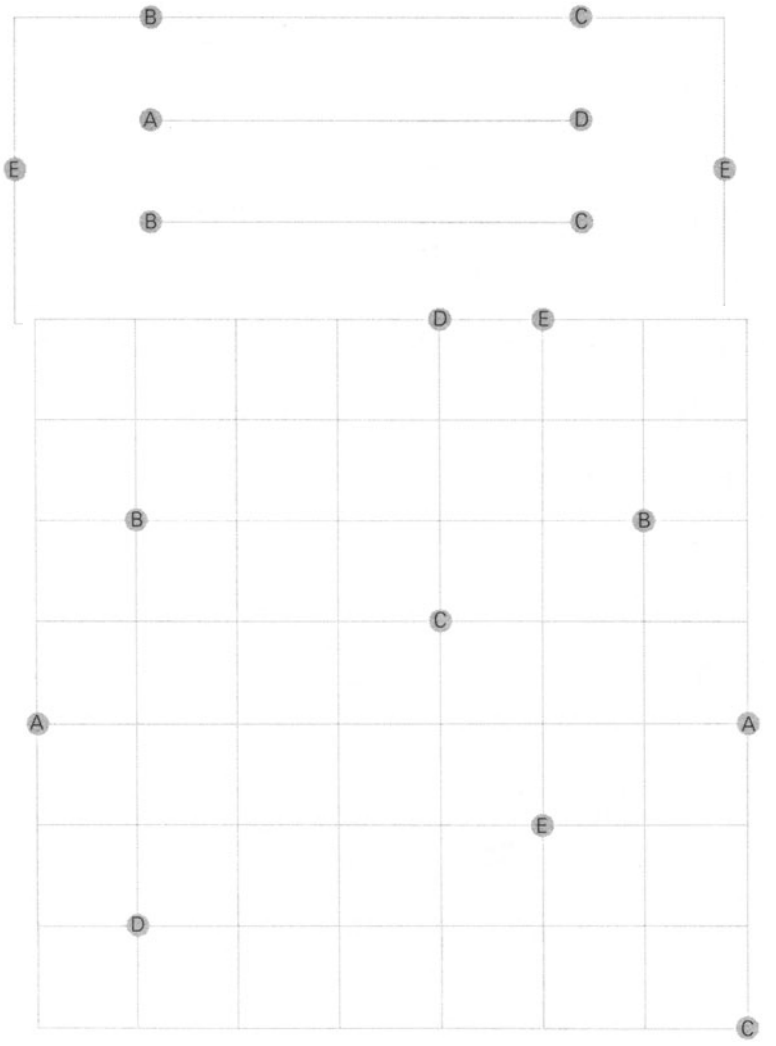


Bild 71 Zwei Probleme mit integrierten Schaltkreisen

die Eulersche Linie für den Graph von Bild 72 zeichnen zu lassen. Falls sich die Linien kreuzen dürfen, ist das leicht, sonst aber ist es gar nicht so einfach. T. H. O'Beirne aus Glasgow hat eine schnelle Lösungsmethode für solche Rätsel vorgeschlagen. Und zwar bemalt man die Gebiete abwechselnd, so wie im mittleren Bild, und löst sie an den

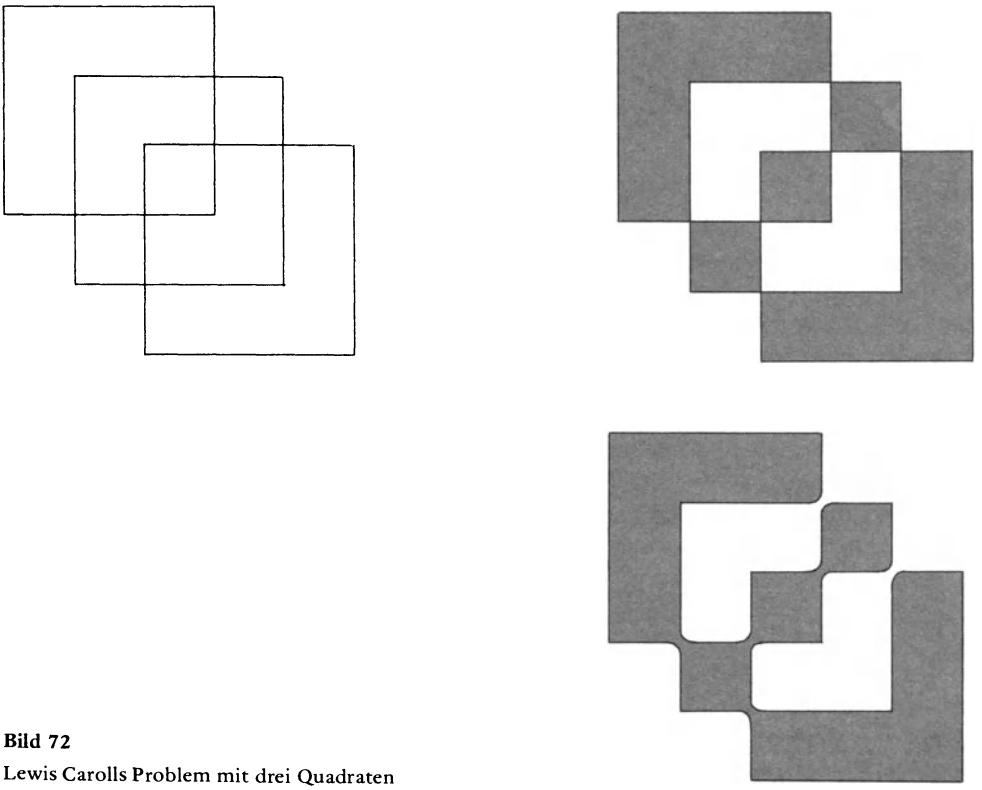


Bild 72
Lewis Carolls Problem mit drei Quadraten

Knotenpunkten so, daß die farbigen Flächen einfach zusammenhängend bleiben (d.h. zusammenhängend ohne nichtgefärbte Flächen miteinzuschließen). Der Rand der farbigen Fläche ist nun die gesuchte Eulersche Linie (unten, rechts). Der Leser kann diese Methode an dem Eulerschen Graphen, der im Bild 73 gezeigt wird (und von O'Beirne vorgeschlagen worden ist) erproben; er erhält eine Eulersche Linie von erstaunlicher Symmetrie.

Ein ganz anderer und überraschenderweise viel schwierigerer Typ eines Wegproblems ist der, einen Weg zu finden, der durch jeden Knotenpunkt genau einmal hindurchgeht. Jeder Weg, der keinen Knotenpunkt zweimal passiert, wird in der Graphentheorie elementare Bahn oder Kette genannt. Eine Kette, die zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehr, heißt Zyklus. Und ein Zyklus, der jeden Knotenpunkt genau einmal durchläuft, heißt nach dem irischen Mathematiker aus dem neunzehnten Jahrhundert, Sir William Rowan Hamilton, der als erster solche Wege untersuchte, Hamiltonsche Linie. Er zeigte, daß sich entlang der Kanten aller fünf regelmäßigen Polyeder eine Hamiltonsche Linie zeichnen läßt; ja, es gelang ihm sogar, einem Spielwarenhersteller ein Rätsel zu verkaufen, das darauf beruht, die Hamiltonsche Linie entlang der Kanten eines Dodekaeders zu finden.

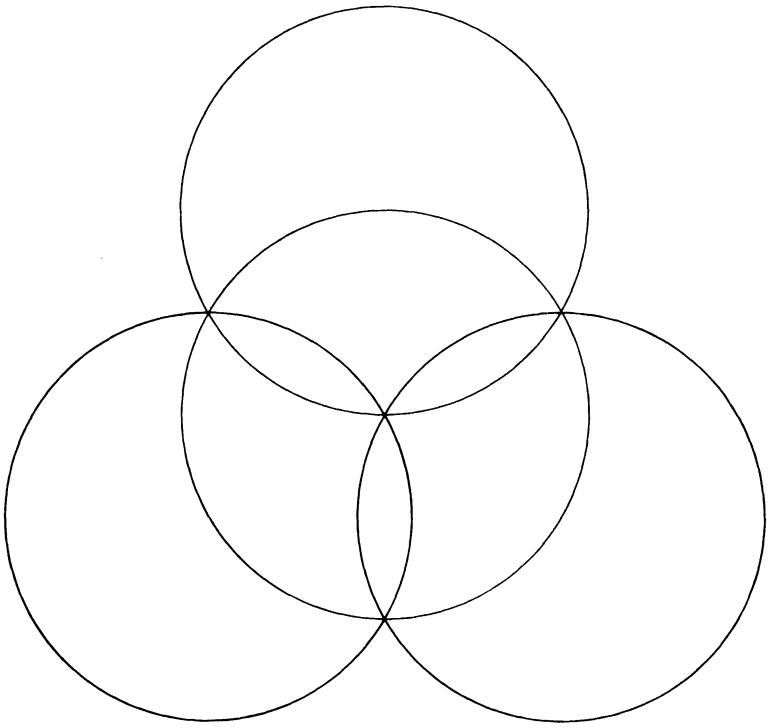


Bild 73 O'Beirnes Problem mit vier Kreisen

Man könnte denken, daß es, wie im Fall der Eulerschen Linie, einfache Regeln gibt, um zu bestimmen, ob ein Graph eine Hamiltonsche Linie darstellt oder nicht; tatsächlich aber sind diese beiden Fälle ganz verschieden. Eine Eulersche Linie muß jede Kante genau einmal durchlaufen, darf aber jeden Knotenpunkt öfter als einmal passieren. Eine Hamiltonsche Linie muß genau einmal durch jeden Knotenpunkt hindurchgehen, aber sie braucht nicht alle Kanten zu bedecken. (Genau gesagt, durchläuft sie nur zwei der Kanten, die an einem Knotenpunkt zusammenkommen.) Hamiltonsche Linien erweisen sich in vielen Gebieten, oft unerwartet, als sehr wichtig. In Operations Research zum Beispiel läßt sich das folgende Problem manchmal als Graph darstellen, indem eine Hamiltonsche Linie eine optimale Lösung gibt: Wie findet man die beste Reihenfolge für die Durchführung einer spezifischen Reihe von Operationen? Unglücklicherweise gibt es keine allgemeine Methode, um entscheiden zu können, ob ein gegebener Graph ein Hamiltonscher Graph ist, oder um alle Hamiltonschen Linien zu finden, falls ein Hamiltonscher Graph vorliegt.

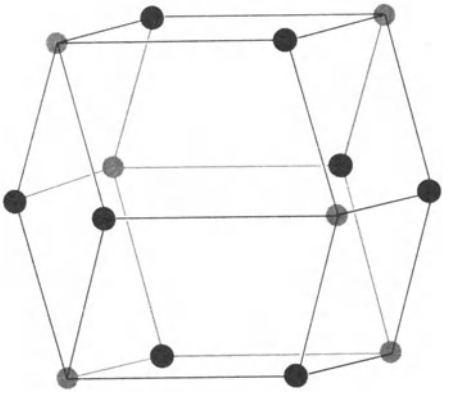


Bild 74
Das Skelett eines rhombischen Dodekaeders

Das Skelett vieler, aber nicht aller teilweise regelmäßigen Polyeder ist ein Hamiltonscher Graph. Eine Ausnahme bildet der rhombische Dodekaeder, der im Bild 74 gezeigt wird; Granatkristalle nehmen häufig diese Form an. Auch wenn der Weg nicht geschlossen sein muß, gibt es keine Möglichkeit, das Skelett so zu durchlaufen, daß jeder Knotenpunkt genau einmal passiert wird. Ein sehr kluger Beweis stammt von H. S. M. Coxeter. Alle Knotenpunkte vom Grad 4 sind grau, alle vom Grad 3 schwarz eingezeichnet. Man beachte, daß jeder graue Knotenpunkt völlig von schwarzen umgeben ist und umgekehrt. Daher muß jeder Weg, der durch alle vierzehn Knotenpunkte führt, abwechselnd einen grauen und einen schwarzen durchlaufen. Es gibt aber sechs graue und acht schwarze Knotenpunkte, daher also keinen Weg, weder einen geschlossenen noch einen offenen, der die Punkte abwechselnd durchläuft.

Eine alte, unterhaltsame Schachaufgabe, die auf den ersten Blick nichts mit Hamiltonschen Linien gemeinsam zu haben scheint, ist der geschlossene Springerrundzug. Dazu stellt man den Springer auf ein Feld des Schachbrettes und versucht dann einen Weg zu finden, der nur aus aufeinanderfolgenden Rösselzügen besteht, und bei dem die Figur auf jedem Feld genau einmal zu stehen kommt; außerdem soll der Springer zu seiner Ausgangsposition zurückkehren. Nun stelle man sich vor, daß jedes Feld durch einen Punkt und jeder mögliche Rösselzug zwischen zwei Feldern durch eine Linie zwischen den beiden Punkten dargestellt sei. Das Ergebnis ist natürlich ein Graph. Jeder Weg, der durch jeden Punkt genau einmal hindurchgeht ist eine Hamiltonsche Linie, und jede solche Linie stellt einen geschlossenen Springerrundzug dar.

Solch ein Rundzug ist auf jedem Brett mit einer ungeraden Anzahl von Feldern unmöglich. (Kann der Leser den Grund angeben?) Das kleinste Rechteck, in dem ein geschlossener Rundzug möglich ist, muß aus 30 ($3 \cdot 10$ oder $5 \cdot 6$), das kleinste Quadrat aus 36 Feldern bestehen. Hat ein Rechteck eine Seite, die kleiner als drei ist, so sind nicht einmal offene Rundzüge möglich. Niemand weiß, wie viele Millionen verschiedener Springerrundzüge es auf dem üblichen acht-mal-acht Schachbrett gibt. In der sehr umfangreichen Literatur beschränkt sich das Interesse meist auf Wege, die interessante Symme-

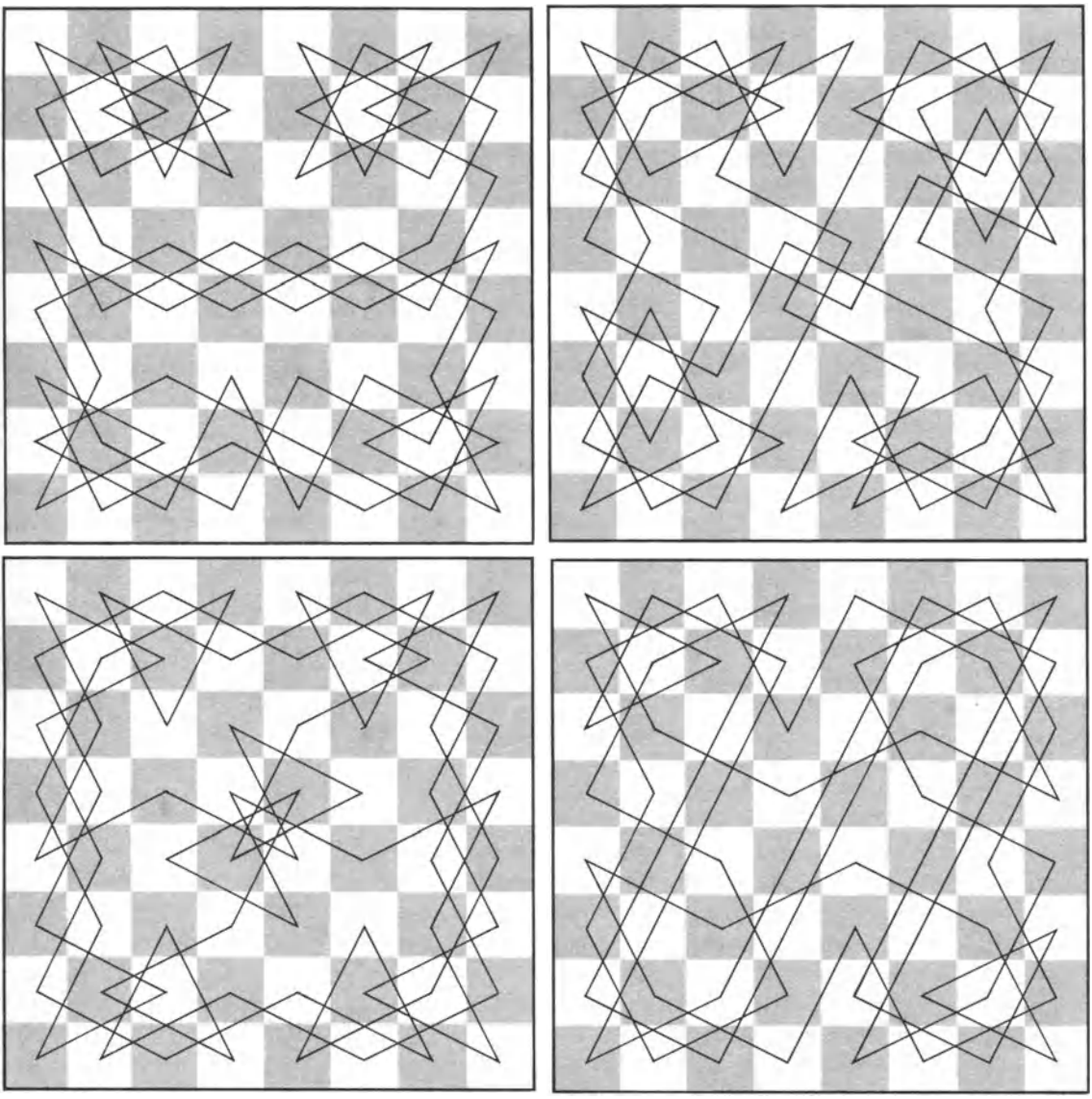


Bild 75 Geschlossene Springerrundzüge

trieeigenschaften aufweisen. Tausende elegante Muster, wie die im Bild 75 sind schon entdeckt worden. Vierfach symmetrische Wege (die sich bei einer Drehung um je 90 Grad jeweils decken) sind auf dem acht-mal-acht Brett nicht möglich, auf dem sechs-mal-sechs Brett jedoch gibt es fünf solche Wege.

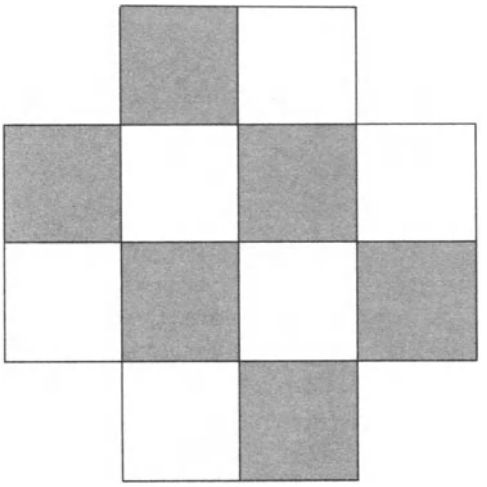


Bild 76
Aufgabe für Rösselzüge

Als Einführung in diesen klassischen Zeitvertreib ist der Leser eingeladen, einen Springerrundzug für ein einfaches Brett aus zwölf Feldern zu suchen (Bild 76). Ist diese Aufgabe gelöst, ergibt sich eine anscheinend viel schwierigere Frage: Ist es möglich, den Springer in aufeinanderfolgenden Zügen über das Brett zu führen und jeden für den Springer erlaubten Zug genau einmal auszuführen? Es gibt 16 solche verschiedenen Züge. Ein Zug wird als „gemacht" betrachtet, wann immer der Springer zwei Felder durch einen Zug in eine der beiden Richtungen verbunden hat. Der Springer darf dabei auf einem Feld natürlich öfter als einmal zu stehen kommen, derselbe Zug aber darf nicht zweimal gemacht werden. Der Weg muß geschlossen sein.

Der Leser wird sich bald davon überzeugen, daß es einen solchen Weg nicht gibt; aber wie groß ist die kleinste Anzahl von *getrennten* Wegen, die alle 16 möglichen Züge beinhaltet? Das läßt sich in einigen Minuten beantworten, wenn man einen der Sätze über Graphen anwendet, der in diesem Kapitel schon erwähnt wurde.

Lösungen

Die zwei Aufgaben mit integrierten Schaltkreisen sind so zu lösen, wie es Bild 77 zeigt. Eine symmetrische, sich selbst nicht kreuzende Eulersche Linie zur Aufgabe mit den vier Kreisen wird im Bild 78 gezeigt; man erhält sie mit der auf Seite 98 beschriebenen Methode. Der Weg im Bild 79 links zeigt einen geschlossenen Springerrundzug auf dem kreuzförmigen Brett. Um herauszufinden, ob es einen Weg gibt, bei dem jeder mögliche Rösselzug durchgeführt wird, zeichnen wir zuerst einen Graphen (rechts in der Illustration), der jeden Zug zeigt. Man beachte, daß sich in acht Knotenpunkten eine ungerade Anzahl von Kanten trifft. In Übereinstimmung mit einem Satz von Euler

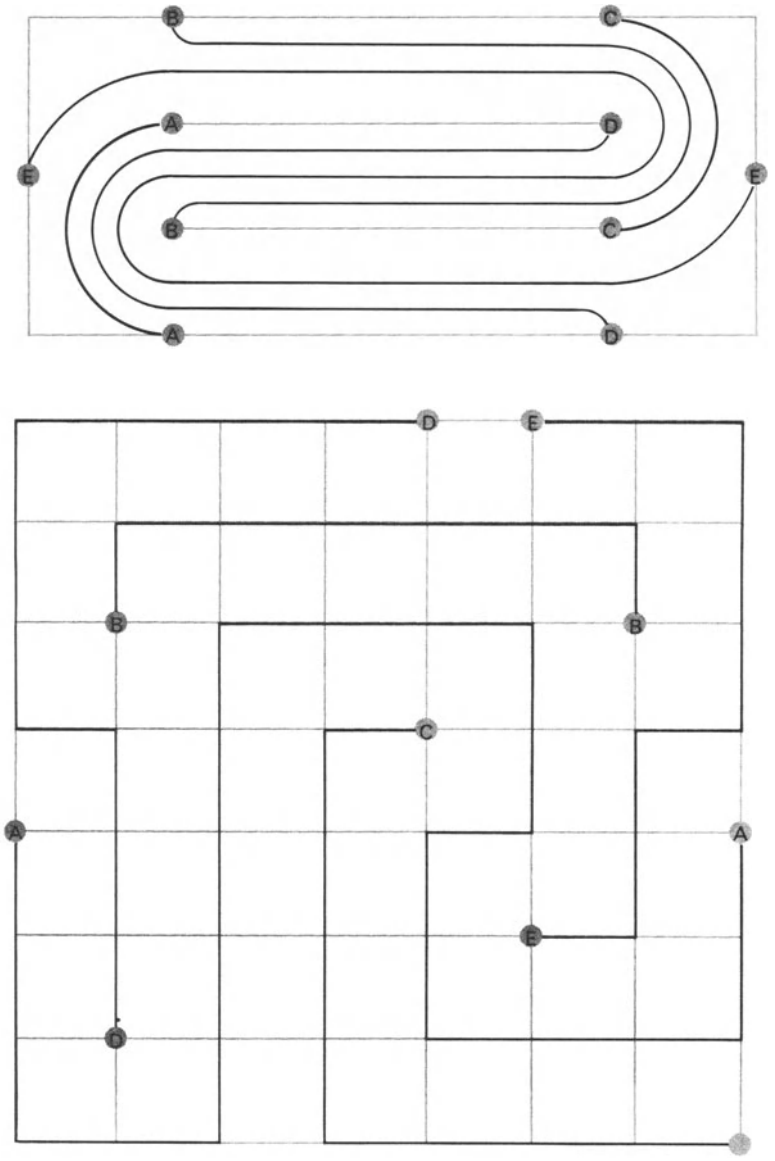


Bild 77 Lösungen der Probleme mit den integrierten Schaltkreisen

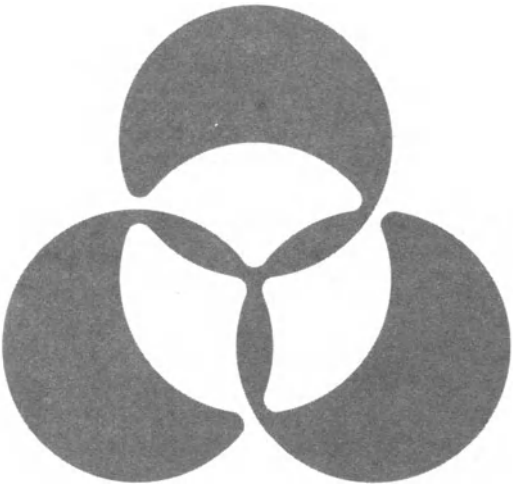


Bild 78
Lösung zur Aufgabe mit den vier Kreisen

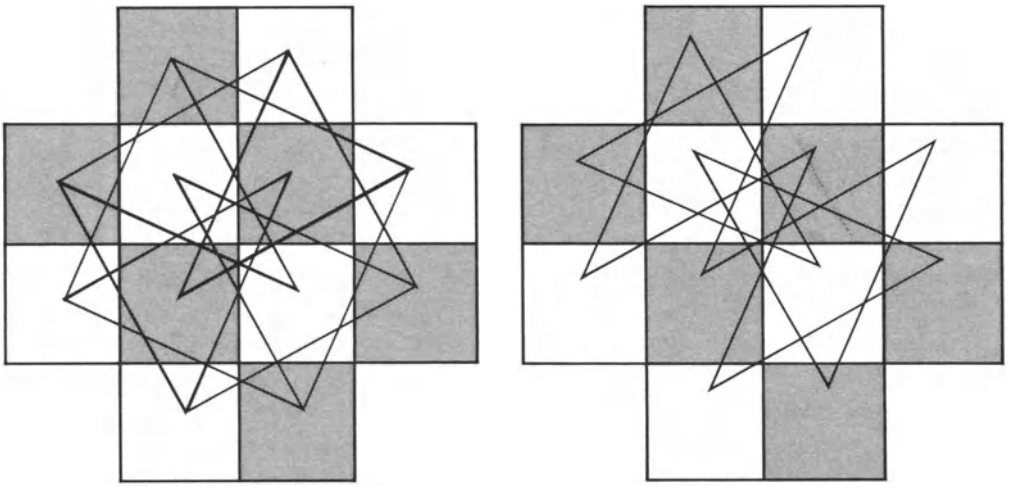


Bild 79 Graphen für den Springerrundzug (links) und „alle möglichen Rösselzüge" (rechts)

braucht man ein Minimum von 8/2 oder 4 Wegen um jede Kante einmal zu befahren. Jeder der Wege muß an einem ungeraden Knotenpunkt beginnen und an einem anderen ungeraden enden.

Um zu beweisen, daß auf einem Brett mit einer ungeraden Anzahl von Feldern kein Springerrundzug möglich ist, färbt man zuerst die Felder abwechselnd, wie ein Schachbrett. Durch jeden Rösselzug kommt die Figur von einem Feld auf ein andersfarbiges Feld, so daß bei einem geschlossenen Weg eine Hälfte der Felder von der einen, die andere Hälfte von der anderen Farbe sein muß. Hat das Brett aber eine ungerade Anzahl von Feldern, so gibt es, unabhängig von der Gestalt, mehr Felder von der einen Farbe als von der anderen.

11 Das Ternärsystem

Irgendwo in der Dunkelheit sang eine Frau mit einer hohen, wilden Simme und die Melodie hatte keinen Anfang und kein Ende und bestand aus nur drei Noten, die sich immer und immer wiederholten.

Carson McCullers,
"The Ballad of the Sad Cafe"

Von Zeit zu Zeit weisen Anthropologen, die die Mathematik nicht ganz ernst nehmen, darauf hin, daß bei primitiven Völkern verschiedene Zahlensysteme in Gebrauch sind, und werten dies als Beweis dafür, daß die Gesetze der Arithmetik in verschiedenen Kulturen unterschiedlich sind. Natürlich basiert aber jedes Zahlensystem auf derselben guten alten Arithmetik, und Zahlensysteme sind nicht mehr als verschiedene Sprachen: verschiedene Möglichkeiten, *dieselben* Zahlen darzustellen und mit ihnen zu rechnen. Zwei und zwei ist ausnahmslos vier, unabhängig von der Schreibweise, und es ist immer möglich, eine Zahlensprache vollkommen adäquat in eine andere zu übersetzen.

Jede ganze Zahl, außer Null, kommt als Basis oder Wurzel eines Zahlensystems in Frage. Die einfachste Sprache, mit 1 als Basis besteht nur aus diesem einen Symbol: die Kerben, die ein Verbrecher in seinen Gewehrschaft schneidet, oder die Perlen, die ein Billardspieler auf einem Draht verschiebt, um seinen Punktestand anzuzeigen. Das Binärsystem hat zwei Symbole: 0 und 1. Das Dezimalsystem, das allgemein in der zivilisierten Welt üblich ist, benützt zehn Symbole. Je größer die Basis ist, desto kompakter läßt sich eine große Zahl darstellen. Für die Dezimalzahl 1000 benötigt man in der Binärschreibweise zehn (1111101000), im 1-er System 1000 Stellen. Der Nachteil einer großen Basis liegt darin, daß man sich mehr Ziffern merken muß und größere Additions- und Multiplikationstafeln hat.

Es gibt immer wieder reformbegeisterte Gruppen, die fast mit religiösem Eifer versuchen, die sogenannte „Tyrannis der 10" zu stürzen, und diese Basis durch eine effizientere zu ersetzen. In den letzten Jahren war besonders das Duodezimalsystem populär, dessen Basis 12 ist. Sein größter Vorteil liegt darin, daß sich alle Vielfachen der Basis ohne Rest halbieren, dritteln und vierteln lassen. (Die periodische Dezimalzahl 0,33333 ..., die für 1/3 steht, wird im 12-er System zu einem einfachen 0,4.) Seit dem sechzehnten Jahrhundert schon gibt es Befürworter des 12-er Systems, unter ihnen solche Persönlichkeiten wie Herbert Spencer, John Quincy Adams und George Bernard Shaw. H. G. Wells läßt in seinem Roman "When the Sleeper Wakes" dieses System noch vor dem Jahr 2100 einführen. Es gibt sogar eine amerikanische Doudezimalgesellschaft (The Duodecimal Society of America, mit ihrem Hauptbüro in Staten Island, New York

10304, 20 Carleton Place). Sie veröffentlicht "The Doudecimal Bulletin" und das "Manual of the Dozen System" und stellt ihren Anhängern Rechenstäbe zur Verfügung, die auf der Basis 12 aufgebaut sind. Die Gesellschaft benützt X als Symbol für 10 (genannt dek) und eine umgekehrte 3 (genannt el) für 11. Die ersten drei Potenzen von 12 heißen do, gro und mo; die Doudezimalzahl 111X wird deshalb mo gro do dek gelesen.

Die Anhänger der Basis 16 haben allerlei lustige Literatur hervorgebracht. Im Jahr 1862 veröffentlichte John W. Nystrom in Philadelphia privat sein "Project of a New System of Arithmetic, Weight, Measure, and Coins, Proposed to Be Called the Tonal System, with Sixteen to the Base." Nystrom schlägt vor, die Zahlen von 1 bis 16 an, de, ti, go, su, by, ra, me, ni, ko, hu, vy, la, po, fy und ton zu nennen. Auch Joseph Bowden, der Mathematiker am Adelphi College war, hielt 16 für die beste Basis, zog es aber vor, für die Zahlen von 1 bis 12 die üblichen Bezeichnungen beizubehalten und dann mit thrun, feen und wunty fortzusetzen. In Bowdens Schreibweise wird 255 als ƺƺ geschrieben und "feenty feen" genannt. (Man vergleiche Kapitel 2 seiner Special Topics in Theoretical Arithmetic", privat verlegt; Garden City, New York, 1963.)

Es scheint unwahrscheinlich, daß die „Tyrannis der 10" in der nächsten Zeit ins Wanken gerät; das hält den Mathematiker jedoch nicht davon ab, dasjenige Zahlensystem zu verwenden, das für eine bestimmte Aufgabe am zweckdienlichsten erscheint. Kommen in einer Struktur hauptsächlich zwei verschiedene Werte vor, wie der Ein-Aus-Zustand im Computer, kann das Binärsystem effizienter als das Dezimalsystem sein. Analog ist das Tertiärsystem oft die effizienteste Art und Weise, Strukturen zu analysieren, in denen hauptsächlich drei Werte vorkommen. Im Zitat, das diesem Kapitel vorangestellt ist, schreibt Carson McCullers über sich selbst. Sie ist die Frau, die in der Dunkenheit jene groteske Dreiecksbeziehung besingt, in der Macy Fräulein Amelia liebt, die wiederum Cousin Limon, der nun Macy liebt. Einem Mathematiker führt diese traurige, endlose Folge unerwiderter Liebe die endlose Folge der Arithmetik im Ternärsystem vor Augen: Jede Note folgt der anderen, wie die Zahlen auf einer ewig laufenden Dreistundenuhr.

Im Ternärsystem sind diese drei Noten 0, 1 und 2. Betrachtet man eine gegebene Ternärzahl von rechts nach links, so steht jede Ziffer für das Vielfache einer höheren Potenz von drei. In der Ternärzahl 102 zum Beispiel, steht 2 für $2 \cdot 1$. Die 0 ist ein „Platzhalter", der verdeutlicht, daß es keine Vielfachen von 3 gibt. 1 steht für $1 \cdot 9$. Addiert man diese Werte, $2+0+9$ so erhalten wir 11, die entsprechende Dezimalzahl zu der Ternärzahl 102. Bild 80 zeigt die entsprechenden Ternärzahlen zu den Dezimalzahlen 1 bis 27. (Es gibt übrigens einen chinesischen Abakus, der sich leicht an das Ternärsystem anpassen läßt. Man braucht ihn nur umzudrehen und den Teil mit zwei Kugeln benützen.)

Die drei möglichen Zustände einer Schalenwaage sind wohl der Fall, der sich besonders zu einer ternären Analyse anbietet; entweder ist die eine oder die andere Schale unten oder es herrscht Gleichgewicht. Schon im Jahr 1624 fragte Claude Gasper Bachet in der zweiten Auflage eines Buches mit mathematischen Rätseln nach der minimalen Anzahl von Gewichten, die nötig sind um jedes Objekt mit einem ganzzahligen Gewicht zwischen 1 und 40 Pfund abwiegen zu können. Darf man die Gewichte jeweils nur in eine der beiden Waagschalen legen ist die Antwort sechs: 1, 2, 4, 16 und 32 (aufeinanderfolgende Potenzen von 2). Kann man die Gewichte beliebig verteilen, benötigt man nur vier: 1, 3, 9 und 27 (aufeinanderfolgende Potenzen von 3).

Dezimalzahlen	Ternärzahlen			
	3^3	3^2	3^1	3^0
1				1
2				2
3			1	0
4			1	1
5			1	2
6			2	0
7			2	1
8			2	2
9		1	0	0
10		1	0	1
11		1	0	2
12		1	1	0
13		1	1	1
14		1	1	2
15		1	2	0
16		1	2	1
17		1	2	2
18		2	0	0
19		2	0	1
20		2	0	2
21		2	1	0
22		2	1	1
23		2	1	2
24		2	2	0
25		2	2	1
26		2	2	2
27	1,	0	0	0

Bild 80
Ternärzahlen von 1 bis 27

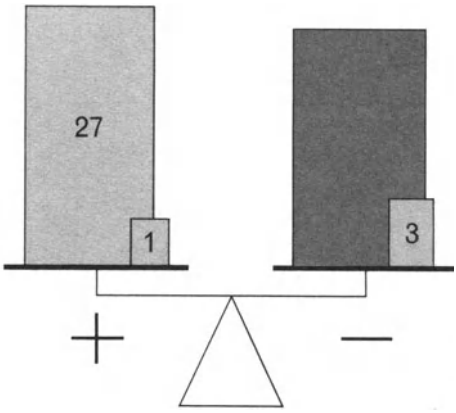


Bild 81 So wiegt man ein 25 Pfund schweres Objekt

1	**001**	221
2	002	**220**
3	**010**	212
4	**011**	211
5	**012**	210
6	020	**202**
7	021	**201**
8	022	**200**
9	100	**122**
10	101	**121**
11	102	**120**
12	110	**112**

Bild 82
Ternärzahlen für das 12-Münzen Problem

Um herauszufinden, wie man die Gewichte verteilen muß, um ein n Pfund schweres Objekt zu wiegen, schreibt man am besten die Zahl n zuerst ins Ternärsystem um. Dann verändert man die Gestalt dieser Zahl folgendermaßen: Statt der Symbole 0, 1 und 2 verwenden wir 0, 1 und -1. Um dies zu erreichen, ersetzen wir jede 2 durch -1 und erhöhen die linksstehende Ziffer um 1. Erhält man dadurch wiederum eine 2 wird sie auf dieselbe Art und Weise behandelt. Ergibt sich eine 3 ersetzen wir diese durch 0 und addieren 1 zur linksstehenden Ziffer. Das Gewicht betrage zum Beispiel 25 Pfund, das ist 221 in ternärer Schreibweise. Die erste 2 wird zu -1 gemacht, dann addiert man zur nächstlinken Ziffer 1; dies ergibt die Zahl $1-121$. Die nächste 2 wird ebenfalls durch -1 ersetzt und dann links 1 addiert, mit dem Ergebnis $10-11$. Diese neue Ternärzahl ist zur alten äquivalent ($27 + 0 - 3 + 1 = 25$), aber die Form ist so, daß man ablesen kann, wie die Gewichte verteilt werden müssen. Positive Ziffern repräsentieren Gewichte die in die eine, negative Ziffern solche, die in die andere Schale kommen. Das zu wiegende Objekt kommt auf die Minusseite. Bild 81 zeigt die Verteilung der Gewichte für ein 25-Pfund schweres Objekt.

Das Ternärsystem, das die Symbole -1, 0 und 1 benützt wird auch „ausgewogenes Ternärsystem" genannt. Eine gute Besprechung findet sich in Donald E. Knuths "Seminumerical Algorithms" (New York: Addison-Wesley; 1969, Seite 173-175). „Bis jetzt gibt es keine wesentlichen Anwendungen der ausgewogenen ternären Schreibweise" folgert Knuth, „aber mit ihren symmetrischen Eigenschaften und ihren einfachen Rechengesetzen wird sie sich vielleicht noch einmal als wichtig erweisen (wenn das 'flip-flop' durch das 'flip-flap-flop' ersetzt werden wird)."

Angenommen, man möchte das Gewicht eines einzelnen Gegenstandes bestimmen, dessen Gewicht ganzzahlig ist und zwischen einem und 27 Pfund liegt. Wie groß ist die minimale Anzahl von Gewichten, die man dazu benötigt, falls die Gewichte auf beide Waagschalen verteilt werden dürfen. Diese Frage soll keine Fangfrage sein, ist aber nicht ganz einfach und die Antwort ist nicht die, die man wahrscheinlich zuerst für möglich hält.

Eine etwas anspruchsvollere Aufgabe mit Waagschalen (es sind schon dutzende von Arbeiten darüber geschrieben worden, seit sie 1945 scheinbar aus dem Nichts auftauchte) ist jene mit den 12 Münzen. Sie sind alle genau gleich, mit Ausnahme einer Fälschung, die ein wenig schwerer oder leichter ist als jede der anderen Münzen. Wie kann man mit einer Schalenwaage, *ohne* Gewichtsstücke, die Fälschung in drei Wägevorgängen identifizieren und außerdem herausfinden, ob sie schwerer oder leichter ist?

Obwohl ich ständig Briefe zu diesem Problem erhalte, habe ich es bis jetzt vermieden, darüber zu schreiben, weil es eine vorzügliche Besprechung von L. C. Strong in der Kolumne „Der Amateurwissenschaftler" in "Scientific American" vom Mai 1955 gibt. Wir werden nun sehen, wie eine Lösung (es gibt viele andere) mit dem Ternärsystem im Zusammenhang steht.

Zuerst fertigt man eine Liste der Ternärzahlen von 1 bis 12 an. Rechts von jeder Zahl schreibt man eine zweite Ternärzahl, indem man in der ersten jede 0 durch 2, jede 2 durch 0 ersetzt (Bild 82). Anschließend sucht man alle Zahlen, deren erste zwei ungleichen Ziffern aus einem der folgenden Ziffernpaare bestehen 01, 12 oder 20. Jede dieser 12 Zahlen (die farbig gedruckt sind) ordnet man nun einer der 12 Münzen zu.

Beim ersten Wägevorgang kommen die vier Münzen, deren erste Ziffer 0 ist, in die linke Waagschale, jene, deren erste Ziffer 2 ist, in die rechte. Herrscht nun Gleichgewicht, so ist 1 die erste Ziffer der gefälschten Münze. Ist die linke Schale schwerer, so ist die erste Ziffer der Fälschung 0, im anderen Fall 2.

Für den zweiten Wägevorgang legt man die vier Münzen, deren mittlere Ziffer 0 ist, in die linke Schale, jene vier, deren mittlere Ziffer 2 ist, in die rechte. Nun wird die mittlere Ziffer der gefälschten Münze nach derselben Methode ermittelt wie die erste. Beim dritten Mal schließlich kommen alle Münzen, deren letzte Ziffer 0 ist in die linke Schale, die mit 2 an letzter Stelle in die rechte. Wie zuvor ermittelt man nun die dritte Ziffer der gesuchten Münze. Bild 83 zeigt diese drei Schritte, in denen die Münze 201 als Fälschung erkannt wird. Ist diese Münze, wie in dem hier gezeigten Fall, schwerer, dann erhält man wirklich die Zahl der gefälschten Münze. Ergibt sich eine Zahl, die *keiner* der einzelnen Münzen zugewiesen worden ist, so ist die gefälschte *leichter*. Ihre Zahl erhält man, indem man in der errechneten Zahl jeweils 0 und 2 miteinander vertauscht.

Es gibt auch einfachere Versionen dieses Verfahrens. Die beste, die ich kenne, stammt von dem Mathematiker W. Fitch Cheney von der Universität in Hartford. Dazu belegt man die Münzen mit den Buchstaben der Wörter SILENT COWARD (= stiller Feigling). In den drei Schritten wägt man SCAN gegen WORD, SCAR gegen LINE, SLOT gegen RAID. Man kennzeichnet jedes Wort, das schwerer ist als das andere. Bei Gleichgewicht streicht man alle diese Buchstaben aus den 6 Wörtern. Nun betrachtet man die gekennzeichneten Wörter. Gibt es einen Buchstaben, der nicht durchgestrichen ist und in jedem Wort vorkommt, so bezeichnet er die gefälschte Münze, die in diesem Fall zu schwer ist. Gibt es keinen solchen Buchstaben, so gibt es sicherlich einen, der in keinem der ungekennzeichneten Wörter ausgestrichen ist. Dieser bezeichnet dann die zu leichte, gefälschte Münze. Es gibt natürlich auch andere Wörter, die dasselbe leisten. L. E. Card, fasziniert von Cheneys SILENT COWARD, fand weitere zwei Dutzend, von denen ich hier nur ein einziges anführen möchte: CRAZY WEIGHTS: CITY-HAZE, GREW-HAZY und WISH-TRAY.

Dieses Problem wurde verallgemeinert. Bei einem Maximum von $3^1 + 3^2 + 3^3 = 39$ Münzen, läßt sich eine gefälschte Münze in vier Schritten identifizieren und man kann gleichzeitig feststellen, ob sie über- oder untergewichtig ist; für $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$ Münzen benötigt man fünf Schritte usw. Allgemein gesagt: Für $1/2\ (3^n - 3)$ Münzen benötigt man n Schritte. Es ist vielleicht erwähnenswert, daß man unter 13 Münzen in drei Schritten die gefälschte herausfinden kann, falls man nicht zu bestimmen braucht, ob sie schwerer oder leichter ist. (Man legt einfach eine Münze zur Seite; findet man unter den restlichen zwölf keine gefälschte, so ist es diese.) Will man auch bestimmen, ob von den 13 Münzen die gefälschte über- oder untergewichtig ist, dann ist dies in drei Schritten möglich, wenn man eine vierzehnte, echte Münze hinzufügt.

Viele Kartentricks stehen in engem Zusammenhang mit dem Zwölfmünzenproblem. Einer der besten ist als Gergonnes Problem der drei Stöße bekannt; der Name stammt von dem französischen Mathematiker Joseph Diez Gergonne, der sich schon im frühen neunzehnten Jahrhundert mit diesem Problem beschäftigte. Jemand wird aufgefordert, sich aus einem Stoß von 27 Karten eine zu merken. Diese Person hält den Stoß Karten

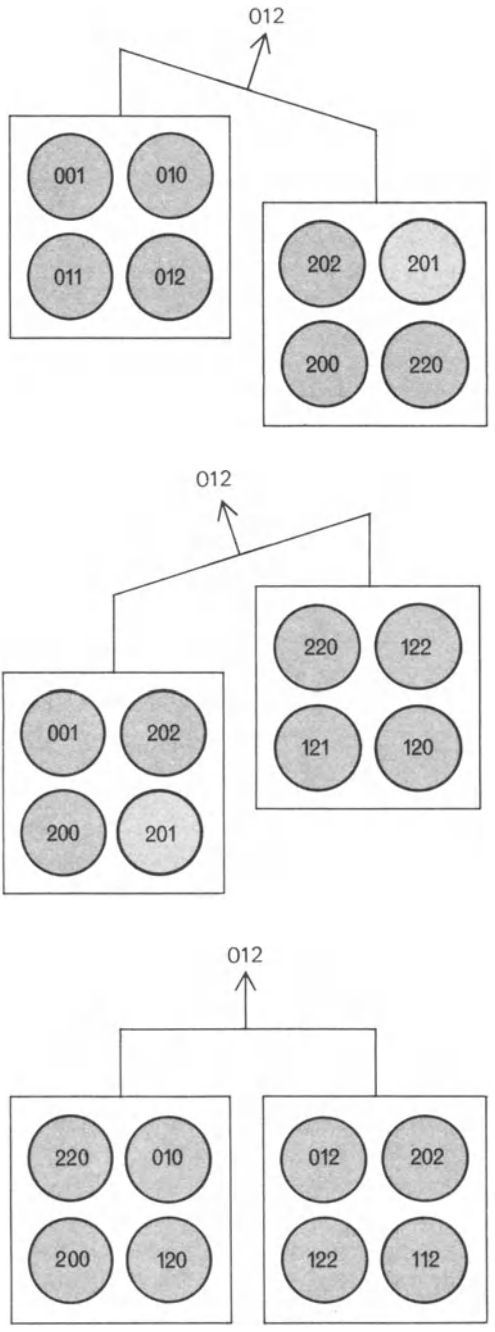


Bild 83
Drei Wägevorgänge zum Identifizieren einer gefälschten Münze

mit der Oberseite nach unten und beginnt dann, drei Karten offen nebeneinander aufzulegen; darauf kommt wieder eine Reihe, immer von links nach rechts usw. bis alle 27 Karten aufgebraucht sind. Das Ergebnis sind drei Stöße zu jeweils neun Karten. Nachdem dem Zauberer gesagt wurde, in welchem der Stöße die gewähnte Karte liegt, werden die Stöße, einer auf den anderen, wieder zusammengelegt. Die Reihenfolge ist beliebig. Nun werden die Karten umgedreht und nochmals in drei offene Stöße aufgeteilt. Unsere Person sagt dem Zauberer wiederum, in welchem Stoß sich die bewußte Karte befindet. Der ganze Vorgang wird nochmals durchgeführt und zuletzt der Stoß Karten mit der Oberseite nach unten auf den Tisch gelegt. Der Zauberer, der die Karten während des gesamten Vorganges nicht berührt hat, gibt nun die Position der gewählten Karte an.

Das Geheimnis liegt darin, bei jedem Einsammeln zu beobachten, ob der Stoß mit der gewählten Karte im gesamten Stoß in der Mitte, oben oder unten zu liegen kommt. Die einzelnen Positionen werden mit folgenden Symbolen bezeichnet: 0 für oben, 1 für Mitte, 2 für unten. Schreibt man jene Ternärzahl, die man durch das dreimalige Einsammeln der Karten erhält von *rechts nach links* an, ergibt sich die Anzahl der Karten, die nach der letzten Runde über der gewählten Karte liegen. Nehmen wir an, daß der Stoß in der ersten Runde oben (0), in der zweiten unten (2) und in der dritten in der Mitte (1) zu liegen kommt. Diese Ziffern ergeben, von rechts nach links geschrieben, die Ternärzahl 120 oder 15 im Dezimalsystem. Es liegen also 15 Karten über der gewählten, die die sechzehnte Position einnimmt. Dieser Trick läßt sich umgekehrt natürlich genauso leicht anwenden. Der Zuschauer wählt irgendeine Zahl zwischen 1 und 27, dann führt der Zauberer das Auflegen und Einsammeln der Karten selben durch und kommt zu jener Karte, die diese Anzahl von oben entfernt ist.

Ist es beim Austeilen der Karten erlaubt, jede Karte auf einen *beliebigen* Stoß zu legen, so erhält man eine sehr wirksame Sortiermethode. An dieser Stelle fordern wir den Leser auf, acht Karteikarten zu nehmen und auf jede einen Buchstaben des Wortes DEMOCRAT zu schreiben. Nun ordnet man die Karten, mit den Buchstaben nach unten, so zu einem Stoß, daß sich von oben nach unten das Wort DEMOCRAT ergibt (Bild 84, oben). Man soll nun die Karten so umordnen, daß sie in alphabetischer Reihenfolge zu liegen kommen, wie im Bild 84 unten gezeigt wird. Man dreht nun die oberste Karte, D, um und verwendet sie als erste Karte von Stoß 1. Die nächsten drei Karten, E, M und O werden auf D gelegt. C wird die erste Karte von Stoß 2, R kommt auf Stoß 1, mit A beginnt Stoß 3 und T wird wieder auf Stoß 1 gelegt. Beim Einsammeln legt man Stoß 1 auf 2 und beide zusammen auf 3; dann dreht man die Karten um. Nun befinden sich die Karten von oben nach unten in alphabetischer Reihenfolge. Um die Karten von ihrer alphabetischen Reihenfolge wieder in DEMOCRAT zurückzuverwandeln, braucht man ebenfalls nur einmal auszuteilen, wie man sich leicht überzeugen kann.

Genug von den DEMOCRAT Karten; wir fertigen neue an, die die Buchstaben des Wortes REPUBLICAN tragen. Können *diese* Karten nun auch in einem einzigen Vorgang in alphabetische Reihenfolge gebracht werden? Nein, das ist nicht möglich. Wie groß ist dann die minimale Anzahl von notwendigen Schritten? Erinnern wir uns, daß man im ursprünglichen Kartenstoß das Wort von oben nach unten lesen können muß. Dann wird jede Karte offen aufgelegt, die Stöße in beliebiger Reihenfolge eingesammelt und zum Schluß der ersten Runde der Stoß, mit den Buchstaben nach unten, hingelegt. Nach der

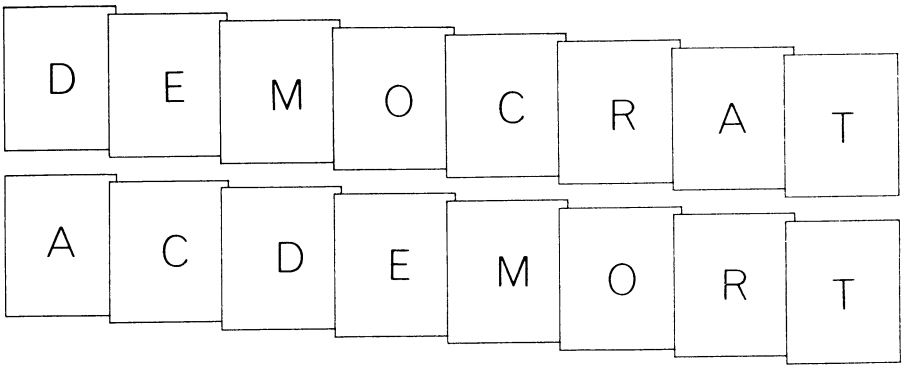


Bild 84 Ursprüngliche (oben) und gewünschte Reihenfolge der DEMOCRAT Karten

letzten Runde muß die Reihenfolge der Karten von oben nach unten ABCEILNPRU sein. Ist dieses Problem gelöst, kann man noch die minimale Anzahl von Schritten ermitteln, die nötig sind, um von der alphabetischen Reihenfolge wieder zu REPUBLICAN zurückzugelangen. Ist beides zu einfach, versuche man sich an Karten mit den Buchstaben von SCIENTIFIC AMERICAN. Im Lösungsteil werde ich erklären, wie sich alle Sortierprobleme dieser Art sehr schnell durch eine einfache Anwendung der Ternärzahlen lösen lassen und ich werde auch noch die Lösung zur Aufgabe mit den Gewichten geben.

Lösungen

Für 27 Schachteln, deren Gewicht jeweils ganzzahlig ist und von einem bis 27 Pfund variiert, beträgt die minimale Anzahl von Gewichtsstücken, die man zum Abwägen benötigt drei: 2, 6 und 18 Pfund (immer das Doppelte aufeinanderfolgender Potenzen von 3); dabei dürfen die Gewichtsstücke in beide Schalen verteilt werden. Mit diesen drei Gewichtsstücken läßt sich für jedes geradzahlige Gewicht zwischen 1 und 27 Gleichgewicht herstellen. Ein ungeradzahliges Gewicht läßt sich durch Überprüfen der beiden nächsten geradzahligen bestimmen; eine 17 Pfund schwere Schachtel ist eben dadurch definiert, daß sie leichter als 18, jedoch schwerer als 16 Pfund ist. (Mitchell Weiss aus Downey in Kalifornien zeichnet für diese neue Betrachtungsweise eines alten Problems).

Die Aufgabe, die Buchstaben des Wortes REPUBLICAN in alphabetische Reihenfolge zu bringen, indem man die Karten auf drei Stöße verteilt, läßt sich in zwei Runden lösen. Zuerst schreibt man sich am besten die Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge auf: ABCEILNPRU. A ist der erste Buchstabe, deshalb bezeichnen wir ihn im Wort REPUBLICAN mit 0. Dann bewegen wir uns im Wort weiter nach *rechts* auf der Suche nach B, das wir natürlich nicht finden. Da wir, um B zu finden, nach *links* gehen müssen, bezeichnen wir es mit 1. Auf der Suche nach C gehen wir weiter nach recht. Dort finden

wir es diesmal tatsächlich und kennzeichnen es ebenfalls mit 1. Um den nächsten Buchstaben, E, zu finden, müssen wir nach links, also kennzeichnen wir ihn mit 2. I ist rechts von E, bekommt also wieder eine 2; für L müssen wir aber wieder die Richtung wechseln, also bekommt es eine 3. Kurz gesagt: Wir erhöhen die Zahl nur dann, wenn wir nach links gehen müssen, um den Buchstaben zu finden. Auf diese Weise erhalten wir folgendes Ergebnis:

5 2 4 5 1 3 2 1 0 3
R E P U B L I C A N

Nun trägt man auf jeder Karte zu dem Buchstaben auch noch die der Dezimalzahl entsprechende Ternärzahl ein, die jeder Buchstabe in diesem Verfahren erhalten hat. Man hält nun die Karten mit der beschriebenen Seite nach unten, in der Reihenfolge REPUBLICAN von oben nach unten. Nun muß man sich vorstellen, daß die drei Stöße von links nach rechts 0, 1, 2 numeriert sind. Die erste Karte, R, trägt die Ternärzahl 12. Ihre *letzte* Ziffer 2, sagt uns, daß wir sie auf Stoß 2 zu legen haben (den am weitesten rechts). Die nächste Karte, E, hat die Ternärzahl 02, kommt also auf den selben Stoß. Dann fährt man fort, jede Karte auf den durch die letzte Ziffer bestimmten Stoß zu legen, bis alle verteilt sind. Die Stöße werden immer von rechts nach links eingesammelt, so daß der letzte (2) auf dem mittleren (1) und diese beiden zusammen auf dem ersten (0) zu liegen kommen. Jetzt dreht man den Stoß wieder um und teilt die Karten jenem Stoß zu, der durch die *erste* Ziffer der Ternärzahl bestimmt wird. Die Stöße werden wieder wie zuvor eingesammelt und die Karten befinden sich nun in alphabetischer Reihenfolge.

Um die Karten wieder in ihre ursprüngliche Reihenfolge zurückzuführen, müssen wir eine neue Analyse vornehmen, indem wir den Buchstaben andere Zahlen zuordnen:

5 2 4 1 3 2 5 2 0 1
A B C E I L N P R U

Die Karten lassen sich in zwei Runden in ihre ursprüngliche Reihenfolge zurückbringen, nur ist das Verfahren diesmal anders. Werden die den Zahlen zugeordneten Dezimalzahlen größer als acht, so gibt es einen Buchstaben, dessen Ternärzahl aus mehr als zwei Ziffern besteht, und die Anzahl der benötigten Runden wird größer als zwei sein. Es ist leicht einzusehen, daß die minimale Anzahl von Runden mit der Anzahl der Ziffern der höchsten Ternärzahl übereinstimmt. Um SCIENTIFIC AMERICAN in alphabetische Reihenfolge zu bringen, muß man die Buchstaben folgendermaßen numerieren:

6 1 4 2 5 6 4 3 3 1 — 0 4 2 5 3 1 0 4
S C I E N T I F I C — A M E R I C A N

Da die größte Zahl, 6, in ihrer Ternärschreibweise nur aus zwei Ziffern besteht, kommt man mit zwei Runden aus. Für die umgekehrte Aufgabe jedoch, also die alphabetische Reihenfolge in SCIENTIFIC AMERICAN zurückzuverwandeln, ist die größte Zahl 10. Die entsprechende Ternärzahl besteht aus drei Ziffern, also benötigt man drei Runden. Falls der Leser diese Methoden auch für längere Phrasen oder Sätze verwendet, wird er erstaunt feststellen, daß für extrem schwierig erscheinende Sortieraufgaben oft schon eine sehr geringe Anzahl von Runden ausreicht. Man kann diese Methode für eine beliebige Anzahl n von Stößen verallgemeinern, indem man einfach die Zahlen in ein System mit der Basis n überträgt.

12 Die Reise um den Mond und sieben andere Probleme

1 Die Reise um den Mond

Man schreibt das Jahr 1984. Auf dem Mond ist eine Basisstation errichtet worden und ein Astronaut soll eine Erkundungsreise um den Mond machen. Er startet von der Basisstation, soll dann einen großen Kreis beschreiben und von der anderen Seite wieder zum Stützpunkt zurückkehren. Die Reise soll in einem Auto durchgeführt werden, das für Fahrten auf dem Mond gebaut worden ist und dessen Tank so viel Treibstoff faßt, wie das Fahrzeug zu einem Fünftel seines Weges braucht. Zusätzlich kann im Auto ein verschlossener Container mitgeführt werden, der genausoviel Treibstoff wie der Tank faßt. Dieser Container kann geöffnet werden, um den Tank aufzufüllen, oder man kann ihn auch ungeöffnet irgendwo an der Mondoberfläche ablagern. Es kann jedoch nicht ein Teil des Containerinhalts zurückgelassen werden.

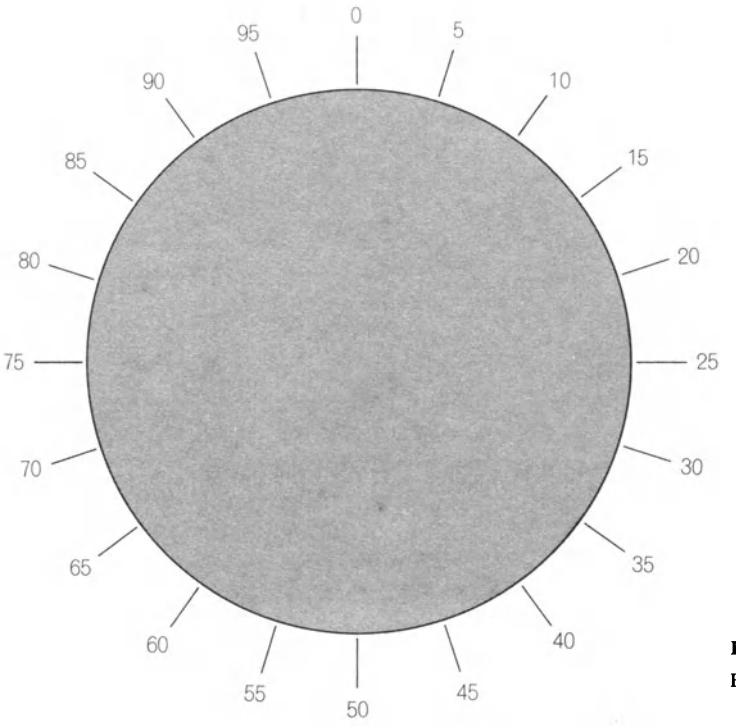


Bild 85
Eine Reise um den Mond

Die Aufgabe besteht nun darin herauszufinden, wie man die Reise um den Mond mit minimalem Treibstoffverbrauch durchführen kann. Zur Vorbereitung dürfen beliebig viele Fahrten in beiden Richtungen durchgeführt werden, auf denen man Container an strategisch interessanten Punkten ablagern und später zum Auftanken benützen kann, aber schließlich muß eine komplette Rundreise in einer Richtung stattfinden. An der Basisstation befindet sich ein unbegrenzter Vorrat an Containern und das Auto selbst kann dort von einem großen Tank immer wieder mit Treibstoff versorgt werden. Kommt es mit einem nicht ganz leeren Tank zur Basisstation zurück, so kann dieser nachgefüllt werden, ohne daß der im Tank verbliebene restliche Treibstoff verlorengeht.

Um das Problem zu lösen, zeichnet man am besten einen Kreis und unterteilt ihn in zwanzig Teile (Bild 85). Der in den vorbereitenden Reisen verbrauchte Treibstoff muß in der Gesamtsumme natürlich berücksichtigt werden. Transportiert das Auto zum Beispiel einen Container zum Punkt 90, lagert ihn dort ab und kehrt zur Basisstation zurück, so verbraucht es einen Tank Treibstoff.

Diese Aufgabe aus dem Bereich von Operations Research gleicht in einigen Gesichtspunkten jenem wohlbekannten Problem, in einem Lastwagen eine Wüste zu durchqueren, verlangt aber eine ganz andere Analyse.

2 Das Rechteck und die Ölquelle

In einer ebenen Prairielandschaft wurde nach Öl gebohrt. Man stieß an einer unterirdisch gelegenen Stelle, die genau 21 000 Fuß von einer Ecke des rechteckigen Feldes entfernt war, 18 000 von der gegenüberliegenden und 6 000 Fuß von der dritten Ecke, auf ein bestimmte Material. Wie weit ist diese unterirdische Stelle von der vierten Ecke entfernt? Wer diese Aufgabe löst wird auf eine sehr nützliche Formel stoßen, die von großer Allgemeinheit und gleichzeitig von erfreulicher Einfachheit ist.

3 Ein neues Ticktacktoe

A. K. Austin aus Hull in England hat eine neue, aufregende Variante des Spieles Ticktacktoe vorgeschlagen. Es weicht vom üblichen Spiel insofern ab, als jeder Spieler, in jeder Runde entweder eine Null oder ein Kreuz zeichnen kann. Der erste Spieler, dem es gelingt, eine Reihe aus drei Zeichen zu erhalten (entweder drei Kreuze oder drei Nullen) gewinnt das Spiel.

Das traditionelle Spiel geht unentschieden aus, falls beide Seiten logisch richtig spielen. Das trifft jedoch für die eben besprochene neue Variante nicht zu. Wer wird unter der Annahme, daß beide Spieler ihre beste Strategie anwenden, sicher gewinnen: der erste oder der zweite Spieler?

4 Die Münzen eines Reiches

In den Vereinigten Staaten benötigt man mindestens acht Münzen um die Summe von 99 Cent zu erhalten: einen halben Dollar, einen Vierteldollar, zwei Zehncentstücke und vier Pennys. Man soll sich nun vorstellen, das Oberhaupt eines kleinen, erst seit kurzer Zeit unabhängigen Staates zu sein. Man steht vor der Aufgabe, ein Münzsystem aufzustellen, dessen kleinste Einheit ein Cent ist. Das Ziel besteht darin, die kleinste Anzahl von verschiedenen Münzen in Umlauf zu setzen, die es ermöglicht, jeden Wert zwischen 1 und 100 Cent (inklusive) aus nur zwei Münzen zusammenzusetzen.

Dieses Ziel wird zum Beispiel sehr einfach durch 18 Münzen mit den folgenden Werten erreicht: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 und 90. Kommt der Leser mit weniger Münzen aus? Jeder Wert muß sich entweder aus einer Münze oder als Summe von zwei Münzen ergeben. Diese zwei Münzen können natürlich auch den gleichen Wert haben.

5 Banknoten und zwei Hüte

„Nein", sagte ein Mathematiker zu seinem 14-jährigen Sohn, „ich bin *nicht* geneigt, dein wöchentliches Taschengeld diese Woche um zehn Dollar zu erhöhen. Aber falls du das Risiko auf dich nehmen willst, mache ich dir ein aussichtsreiches Angebot."

Der Junge stöhnte. „Was ist es diesmal, Vati?"

Sein Vater antwortete: „Zufällig habe ich gerade zehn neue, unzerknitterte Zehndollarscheine und zehn ebensolche Eindollarscheine. Du kannst sie ganz beliebig in zwei Mengen aufteilen. Die eine geben wir in Hut A, die andere in Hut B. Dann verbinde ich dir die Augen. Ich vermische den Inhalt eines jeden Hutes und stelle den einen auf die rechte, den anderen auf die linke Seite des Kaminsims. Du nimmst dir aufs Geratewohl einen Hut und ziehst aus diesem einen Geldschein heraus. Ist's eine Zehndollarnote, darfst du sie behalten."

„Und wenn's keine ist?"

„Mußt du einen Monat lang, ohne dich zu beschweren, Rasen mähen."

Der Junge stimmte zu. Wie muß er die 20 Geldscheine auf die zwei Hüte verteilen um die Wahrscheinlichkeit, eine Zehndollarnote zu ziehen, zu maximieren; wie groß ist dann diese Wahrscheinlichkeit?

6 Dudeneys Wortquadrat

Charles Dunning Jr. aus Baltimore, Maryland, setzte sich vor einiger Zeit selbst die ungewöhnliche Aufgabe, die neun Positionen einer drei-mal-drei Matrix so mit Buchstaben zu belegen, daß sich die größtmögliche Anzahl von dreibuchstabigen Wörtern ergibt. Die Wörter können von links nach rechts oder von rechts nach links, von oben oder von unten oder in einer der beiden Richtungen in den Diagonalen zu lesen sein. Dunnings bestes Ergebnis, das im Bild 86 gezeigt wird, umfaßt zehn Wörter: tea, urn, bay, tub, but, era, are, any, try und bra.

T	E	A
U	R	N
B	A	Y

Bild 86
Dunnings 10-Wort Quadrat

Wie nahe kann man in der englischen Sprache überhaupt an das theoretische Maximum von 16 Wörtern herankommen? Ein Buchstabe kann öfter als einmal verwendet werden, zwei gleiche Wörter zählen aber nur einmal. Außerdem sollen es solche sein, die in einem gängigen Wörterbuch enthalten sind. Ich habe hier ein Beispiel aus H. E. Dudeneys Rätselbuch zur Verfügung, das die Anzahl der Wörter noch um zwei erhöht. Vielleicht findet der Leser eine noch bessere Lösung.

7 Ordnen nach Gewicht

Fünf Gegenstände, von denen keine zwei gleiches Gewicht haben, sollen in ansteigender Reihenfolge nach ihrem Gewicht gereiht werden. Dazu steht eine Schalenwaage, aber keine Gewichtsstücke zu Verfügung. Wie kann man die fünf Gegenstände mit nicht mehr als sieben Wägevorgängen richtig reihen?

Für zwei Gegenstände genügt es natürlich, einmal zu wägen. Bei drei Gegenständen muß man dreimal wägen. Beim ersten Mal stellt sich heraus, daß A schwerer ist als B. Dann vergleichen wir B und C. Ist B schwerer, haben wir das Problem mit zwei Wägungen gelöst; ist jedoch C schwerer, ist ein dritter Vorgang nötig, um C mit A zu vergleichen. Vier Gegenstände lassen sich leicht durch fünf Wägungen reihen.

Ab fünf Gegenständen ist diese Aufgabe nicht mehr ganz trivial. Soviel ich weiß, gibt es bis jetzt noch keine allgemeine Methode dafür, wie man n Gegenstände in einer minimalen Anzahl von Wägevorgängen ordnen kann.

8 Schachtouren für Damen

In vielen hundert unterhaltsamen Rätseln, die als „Schachtouren" bekannt sind, handelt es sich um die Züge einer einzelnen Schachfigur auf dem Spielbrett. Im 10.

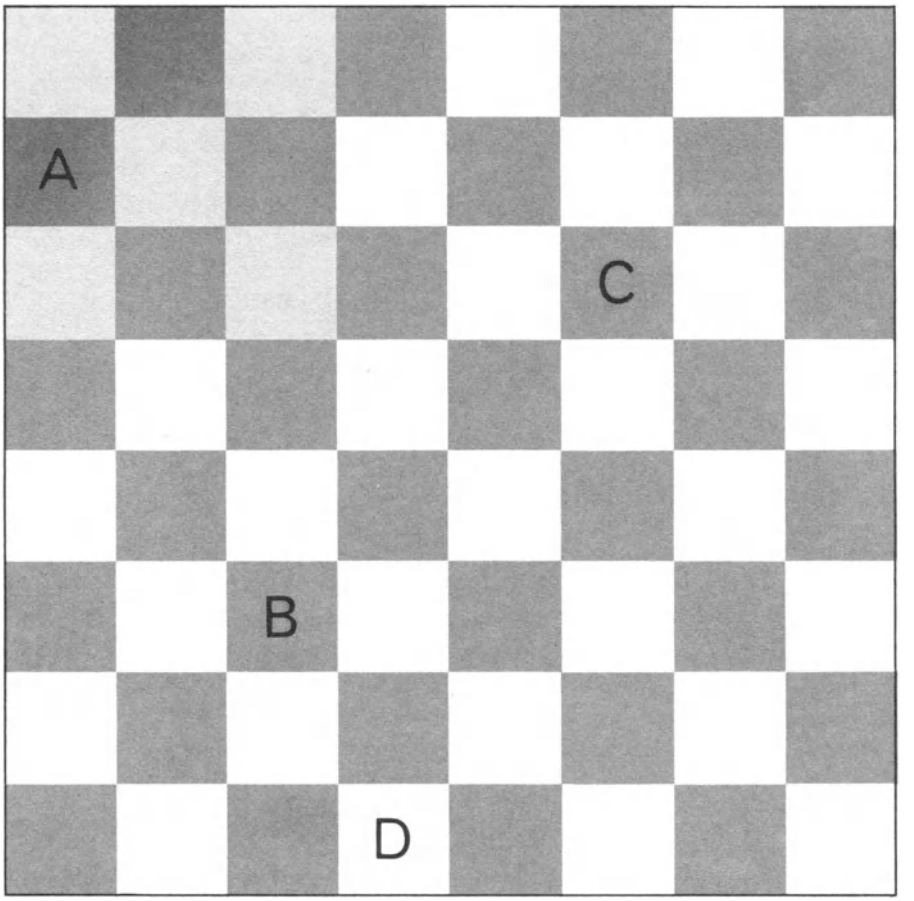


Bild 87 Spielbrett für die Aufgaben mit Schachtouren der Dame

Kapitel dieses Buches besprachen wir Rundzüge des Springers und ihren Zusammenhang mit der Graphentheorie. Hier bringen wir fünf ausgewählte Aufgaben für die Dame. Um sie lösen zu können, braucht der Leser kein Schachspieler zu sein; es genügt zu wissen, daß man die Dame beliebig viele Felder entweder horizontal, vertikal oder diagonal bewegen kann. Die Aufgaben sind etwa nach ansteigendem Schwierigkeitsgrad geordnet.

1. Man stellt die Dame auf das mit *A* bezeichnete Feld (Bild 87). In vier fortlaufenden Zügen sollen alle neun Felder des grau gefärbten Quadrats durchlaufen werden.
2. Man stellt die Dame auf Feld *D* (die normale Anfangsposition der weißen Dame) und stellt sich nun die Aufgabe, in fünf Zügen einen möglichst langen Weg zurückzulegen. (unter „lang" ist die tatsächliche Länge des Weges zu verstehen, nicht die maximale Anzahl der durchlaufenen Felder.) Die Dame darf kein Feld zweimal durchlaufen und ihren eigenen Weg nicht kreuzen. Dabei nimmt man an, daß der Weg jeweils durch den Mittelpunkt der Felder verläuft.

3. Die Dame wird auf Feld *B* gestellt. In 15 Zügen soll jedes Feld genau einmal durchlaufen werden und der Weg im Feld *C* enden.
4. Man stellt die Dame in ein Eckfeld. Nun sollen alle Spielfelder in 14 Zügen durchlaufen werden, wobei der 14. Zug zum Ausgangsfeld zurückführt. Einzelne Felder können dabei öfter als einmal durchlaufen werden. Dieser geschlossene Damenrundzug ist erstmals im Jahr 1876 von Sam Loyd veröffentlicht worden, der ihn immer als eine seiner beachtlicheren Errungenschaften einstufte. Dieser Rundzug kann, unabhängig davon, ob er offen oder geschlossen sein soll, nicht in weniger als 14 Zügen gemacht werden.
5. Es ist ein ähnlicher geschlossener Rundzug zu finden, jedoch auf dem sieben-mal-sieben Brett in nur 12 Zügen. Das bedeutet, daß die Dame von demselben Feld starten muß, auf dem sie ihren Rundzug beendet, und daß sie jedes Feld mindestens einmal durchlaufen muß. Wie zuvor, kann dies aber auch öfter der Fall sein.

Lösungen

1. Der Mond läßt sich mit einem Verbrauch von 23 Tanks Treibstoff umrunden.
   1. In fünf Fahrten werden fünf Container zum Punkt 90 transportiert, das Auto kehr zur Basisstation zurück (Verbrauch: 5 Tanks).
   2. Ein Container wird zum Punkt 85 gebracht, Rückkehr zu Punkt 90 (ein Tank).
   3. Ein Container wird zum Punkt 80 gebracht, Rückkehr zu Punkt 90 (ein Tank).
   4. Ein Container wird zum Punkt 80 gebracht, Rückkehr zu Punkt 85, von wo der sich dort befindliche Container zum Punkt 80 transportiert wird (ein Tank).
   5. Ein Container wird zum Punkt 70 gebracht, Rückkehr zu Punkt 80 (ein Tank).
   6. Rückkehr zur Basisstation.
      Damit sind alle vorbereitenden Reisen in die entgegengesetzte Richtung abgeschlossen. Ein Container lagert am Punkt 70, einer an 90. Zehn Tanks sind schon verbraucht worden.
   7. Ein Container wird zum Punkt 5 gebracht, Rückkehr zur Basisstation (ein halber Tank).
   8. In vier Fahrten werden vier Container zum Punkt 10 gebracht, Rückkehr zur Basisstation (vier Tanks).
   9. Ein Container wird zum Punkt 10 gebracht, Rückkehr zu Punkt 5, von wo ein dort gelagerter Container zu Punkt 10 gebracht wird (ein Tank).
   10. auf den nächsten beiden Fahrten werden zwei Container zu Punkt 20 gebracht, Rückkehr zu Punkt 10 (zwei Tanks).
   11. Ein Container wird zum Punkt 25 transportiert, Rückkehr zu Punkt 20 (ein Tank).
   12. Ein Container wird zum Punkt 30 gebracht, Rückkehr zu Punkt 25; der dort gelagerte Container wird zum Punkt 30 transportiert (ein Tank).
   13. Die Reise wird bis zum Punkt 70 fortgesetzt (zwei Tanks).
   14. Die Reise wird bis zum Punkt 90 fortgesetzt (ein Tank).
   15. Rückkehr zur Basisstation (ein halber Tank).

Bei der Rückkehr ist der Tank des Autos noch halb voll. Der Gesamtverbrauch beträgt also 23 Tanks.

Ich habe diese Aufgabe in E. Dudeneys Buch "Modern Puzzles" (1926) in der Form gefunden, daß ein Berg umkreist werden sollte; ich habe sie als Aufgabe 77 in meiner Ausgabe von Dudeneys "536 Puzzles and Curious Problems" (New York: Scribner's, 1967) nachgedruckt. Die obige Lösung, die von vielen Lesern mit nur geringen Varianten gefunden worden ist, stimmt im Wesentlichen mit der Dudeneys überein.

Sie ist jedoch nicht minimal. Wilfried H. Shepherd aus Manchester in England reduzierte den Treibstoffverbrauch zuerst auf 22 7/12 Container. Er wurde jedoch von Robert L. Elgin aus Altadena in Kalifornien mit 22 9/16 Containern unterboten. Seine Lösung läßt sich auf einige einfache Arten variieren und wird für minimal gehalten. Elgins Lösung läßt sich am besten veranschaulichen, wenn man den Kreis in 80 gleich große Teile unterteilt. Jedesmal, wenn man sich von der Basisstation entfernt, wird ein Container mitgenommen und dann abgelagert, bevor man den Rückweg antritt. Jedesmal, wenn der Tank des Autos leer ist, wird er von irgendeinem der vorhandenen Container aufgefüllt. Man nimmt an, daß jeder Container 80/5 = 16 Einheiten Treibstoff faßt. Und so schaut die Lösung aus:

1. Ein Container wird zum Punkt 73 gebracht, Rückkehr zur Basisstation (Verbrauch: 14 Tanks).
2. Zwei Container werden zu Punkt 75 gebracht, Rückkehr zur Basisstation (20 Tanks).
3. Zwei Container zu 72, Rückkehr zur Basisstation (32 Tanks).
4. Ein Container zu 69 1/2, Rückkehr zu 75 (16 Tanks).
5. Ein Container zu 67 1/2, Rückkehr zu 69 1/2, vorwärts zu 67 1/2, zurück zu 72 (16 Tanks).
6. Ein Container zu 64, zurück zu 67 1/2, vorwärts zu 66, zurück zu 67 1/2, vorwärts zu 66 (16 Tanks).
7. Ein Container zu 57, zurück zu 64 (16 Tanks).
8. Rückkehr zur Basisstation (16 Tanks).
9. Fünf Container zu 8, zurück zur Basisstation (80 Tanks).
10. Ein Container zu 10, zurück zu 8, vorwärts zu 10, zurück zu 8 (16 Tanks).
11. Ein Container zu 16, zurück zu 8 (16 Tanks).
12. Ein Container zu 16 1/2, zurück zu 16, vorwärts zu 16 1/2, zurück zu 10 (16 Tanks).
13. Ein Container zu 21 1/4, zurück zu 16 1/2 (16 Tanks).
14. Ein Container zu 25, zurück zu 21 1/4, vorwärts zu 25 (16 Tanks).
15. Ein Container zu 41 (16 Tanks).
16. Vorwärts zu 41 (16 Tanks).
17. Vorwärts zu 73 (16 Tanks).
18. Vorwärts zur Basisstation (7 Tanks). Der Gesamtverbrauch an Treibstoff beträgt 361/16 = 22 9/16 Tanks.

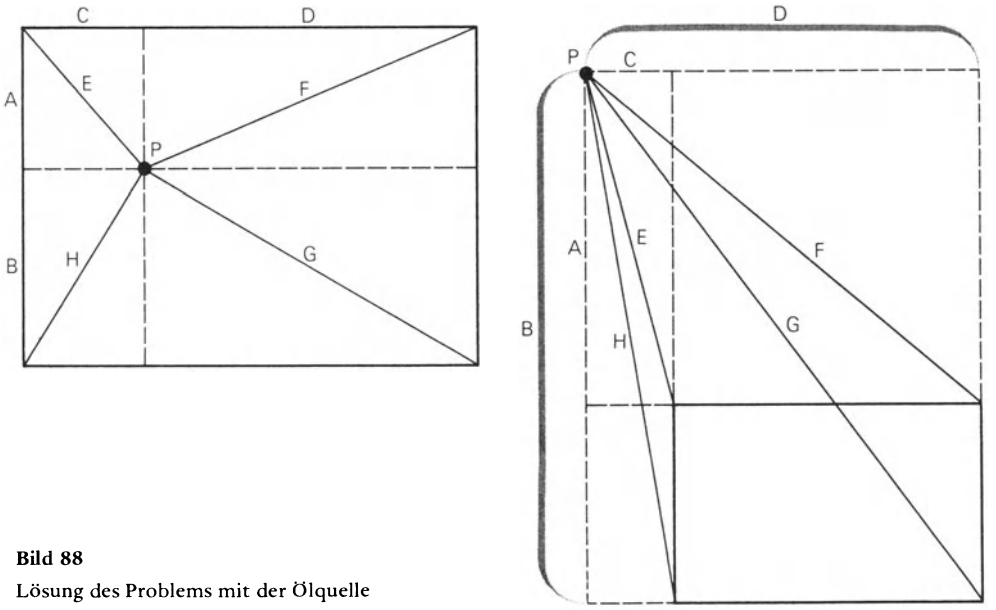


Bild 88
Lösung des Problems mit der Ölquelle

2. Zuerst betrachtet man einen Punkt p innerhalb des Rechtecks, wie dies im Bild 88 gezeigt wird. Zieht man zwei gestrichelte Koordinaten, so erhält man verschiedene rechtwinkelige Dreiecke. Da $e^2 = a^2 + c^2$ und $g^2 = b^2 + d^2$ gilt, können wir folgende Gleichung schreiben:

$$e^2 + g^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 .$$

Da außerdem auch $f^2 = a^2 + d^2$ und $b^2 = b^2 + c^2$ gilt, kann man auch schreiben

$$f^2 + b^2 = a^2 + d^2 + b^2 + c^2 .$$

Die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen sind identisch, also gilt

$$e^2 + g^2 = f^2 + b^2 .$$

Dieselbe Analyse läßt sich auch auf die untere Skizze anwenden, in der p außerhalb des Rechtecks liegt. Liegt p in beiden Diagrammen nicht in der Ebene des Dreiecks, sondern tiefer, werden zwar einige Dreieckseiten länger, die in den Gleichungen ausgedrückten Relationen bleiben jedoch gleich. Anders gesagt: Unabhängig davon, ob der Punkt p oberhalb, unterhalb oder sogar auf einer Kante oder Ecke des Rechteckes liegt, ist die Summe der Quadrate seiner Entfernung von zwei gegenüberliegenden Ecken des Rechteckes gleich der Summe der Quadrate der Entfernung von den beiden anderen Ecken. Wendet man diese Formel auf die drei gegebenen Distanzen an, so ergibt sich als vierte Entfernung 27 000 Fuß. Die Seiten des Rechteckes sind durch die gegebenen Größen natürlich nicht bestimmt.

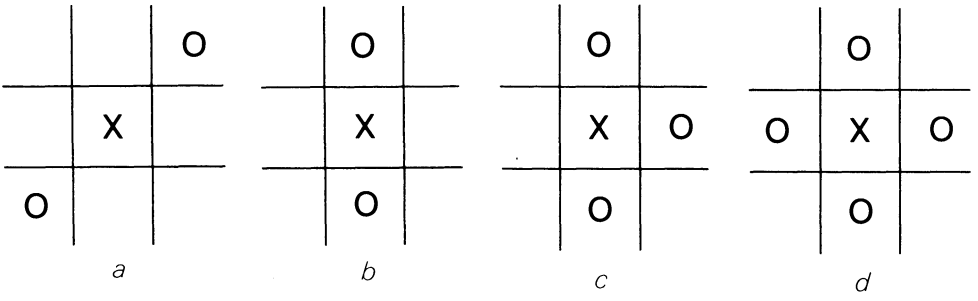


Bild 89 Ticktacktoe

3. Steht es einem Ticktacktoespieler in jeder Runde frei, ob er ein Kreuz oder eine Null verwendet, kann der erste Spieler immer gewinnen, wenn er nur das mittlere Feld besetzt. Angenommen er zeichnet ein Kreuz ein. Dem zweiten Spieler steht es dann frei, entweder eine Zelle an der Seite oder eine Eckzelle zu besetzen.
Nehmen wir einmal an, er wählt eine Eckzelle. Damit er nicht im nächsten Zug verliert, muß er mit einer Null spielen. Daraufhin zeichnet der erste Spieler eine Null in die entgegengesetzte Ecke, wie in Diagramm a, Bild 89. Nun kann der zweite Spieler nicht mehr verhindern, daß sein Gegner im nächsten Zug gewinnt.
Was geschieht, falls der zweite Spieler bei seinem zweiten Zug eine seitlich gelegene Zelle wählt? Wiederum muß er, um nicht beim nächsten Zug zu verlieren, eine Null setzen. Der erste Spieler reagiert so, wie im Diagramm b gezeigt wird. Der nächste Zug des zweiten Spielers ist dadurch schon bestimmt (c). Der erste reagiert so, wie aus d ersichtlich ist, wobei es egal ist, welches Zeichen er verwendet. Unabhängig davon, wie der zweite Spieler nun fortsetzt, gewinnt der erste im nächsten Zug.
Vom wilden Ticktacktoe ausgehend (wie dieses Spiel von S. W. Golomb genannt wurde) bietet sich sofort eine neue Variante an: das umgekehrte wilde Ticktacktoe. Die Regeln bleiben gleich, nur daß jener Spieler, der als erster drei gleiche Zeichen in einer Reihe hat, *verliert*. Robert Abbott lieferte als erster einen Beweis, daß dieses Spiel unentschieden bleibt, falls es logisch richtig gespielt wird. Der erste Spieler kann sich zwar nicht den Sieg sichern, aber immer ein Unentschieden erreichen, wenn er nach der symmetrischen Strategie spielt; diese ist jener Strategie ähnlich, mit der sich im normalen (oder zahmen) umgekehrten Ticktacktoe ein Unentschieden erreichen läßt. Er besetzt mit einem der beiden Zeichen das mittlere Feld. Sein weiteres Spiel ist zu dem des zweiten Spielers symmetrisch entgegengesetzt; das Zeichen, das er wählt, ist immer von dem gerade zuvor verwendeten verschieden.
Wie Golomb schon darauf hingewiesen hat, kann man mit dieser Strategie im umgekehrten Ticktacktoe (im wilden und im zahmen) auf allen Spielbrettern ungerader Ordnung mindestens unentschieden spielen. Auf Spielfeldern gerader

Ordnung kann der zweite Spieler mit einer ähnlichen Strategie immer mindestens ein Unentschieden erreichen. Auf einem räumlichen Spielfeld dritter Ordnung, auf dem ein Unentschieden nicht möglich ist, führt die Strategie im umgekehrten Ticktacktoe (im wilden und im zahmen), wie Golomb noch hinzufügt, immer zu einem Sieg des ersten Spielers.

4. Mit nur sechzehn verschiedenen Münzen läßt sich jeder Wert von 1 bis 100 Cent als Summe von nicht mehr als zwei Münzen ausdrücken. Es sind dies die folgenden Münzen: 1, 3, 4, 9, 11, 16, 20, 25, 30, 34, 39, 41, 46, 47, 49 und 50. Diese Lösung findet man, ohne Beweis für ihre Minimalität, in Aufgabe 19 von Roland Sprague's „Unterhaltsame Mathematik", Vieweg, Braunschweig. Sprague's Lösung gilt nur bis 100. Eine 16-zahlige Lösung, die bis 104 gilt, wurde von Peter Wagner von der Universität in London gefunden: 1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 47, 48, 51 und 52.

5. Die beste Chance, eine Zehndollarnote zu ziehen, hat der Junge dann, wenn er in den einen Hut eine einzige Zehndollarnote und in den anderen Hut die restlichen neunzehn Geldscheine gibt (9 Zehndollarnoten und 10 Eindollarnoten). Die Wahrscheinlichkeit, daß er den Hut mit der einen Zehndollarnote zieht, beträgt 1 zu 2, und die Wahrscheinlichkeit, daraus eine Zehndollarnote zu ziehen ist 1 (also sicher). Nimmt er den anderen Hut, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß er eine Zehndollarnote zieht immer noch 9/19.

Dieser erstaunliche einfache stochastische Prozeß wird im Bild 90 veranschaulicht. die Wahrscheinlichkeit, aus Hut A eine Zehndollarnote zu ziehen, beträgt $(1/2) \cdot 1$,

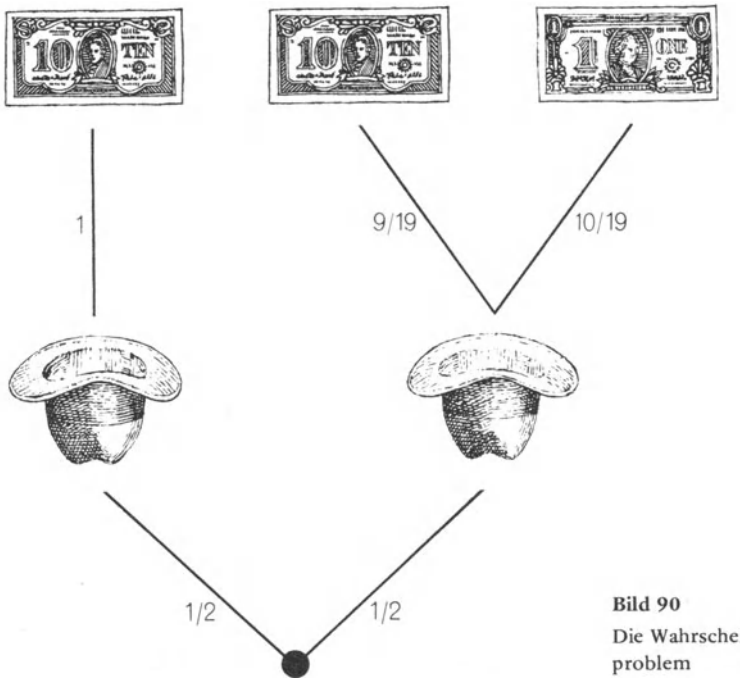


Bild 90
Die Wahrscheinlichkeiten im Hutproblem

oder 1/2. Die Wahrscheinlichkeit, daß er aus Hut *B* eine Zehndollarnote ziehen wird, ist (1/2) · (9/19) oder 9/38. Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten, 14/19 (oder fast 3/4), drückt die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Zehndollarnote aus.

6. Dudeney gelang es, wie wir aus dem posthum veröffentlichtem "a Puzzle-Mine" erfahren, 12 englische Wörter bei folgender Anordnung in einem drei-mal-drei Quadrat zu erhalten:

G E T
A I A
S U P

Die Wörter sind: get, teg, sup, pus, pat, tap, gas, sag, pig, gip, sit und aia. Rechnet man die Verkürzung 'tis noch dazu, sind es 13 Wörter.

Mehr als 50 Leser sandten Quadrate, die 12 Wörter ergeben; die meisten davon sind besser als Dudeneys Quadrat. Viele Leser zeigten, daß man leicht 12 Wörter erhalten kann, indem man in der Mitte des Quadrates ein Kreuz, bestehend aus dem Buchstaben A, einsetzt, wie dies im Bild 91 gezeigt wird (Nummer 1). Sechsundzwanzig Leser sandten Quadrate mit 13 Wörtern, die in den meisten Fällen in Webster's New Collegiate Dictionary zu finden sind. Das typische Quadrat (Nummer 2 in unserem Bild) wurde unabhängig von Vaughn Baker, Mrs. Frank H. Driggs, William Knowles und Alfred Vasko entdeckt.

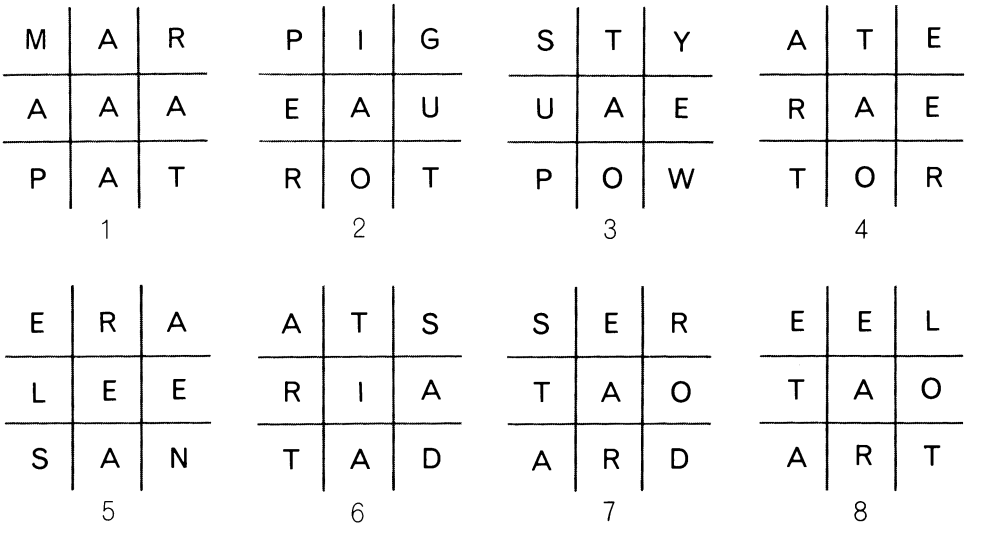


Bild 91 Lösungen zum Wortquadraträtsel: (1) 12 Wörter, (2) 13 Wörter, (3) 14 Wörter, (4-8) 16 Wörter

Vaughn Baker, David Grannis, Horace Levinson, H. P. Luhn, Stephen C. Root, Hugh Rose, Frank Tysver, C. Brooke Worth und George Zinsmeister fanden jeweils Quadrate mit 14 Wörtern. Bakers Quadrat (Nummer 3 im Bild) verwendet nur ein Wort – "wey" – das in kleineren Wörterbüchern meist nicht enthalten ist. Fredrick Chait, James Garrels, B. W. Le Tourneau, Marvin Weingast und Arnold Zeiske fanden Quadrate mit 15 Wörtern; es sind jedoch in keinem mehr als 12 Wörter enthalten, die auch in kleineren Wörterbüchern zu finden sind.

Fünf Leser landeten den Haupttreffer mit 16 Wörtern: Dimitri Borgmann, L. E. Card, Mrs. D. Harold Johnson, Peter Kugel und Wylie Wilson. Diese fünf Quadrate (mit den Nummern 4 bis 8) sind entsprechend der Reihenfolge der alphabetisch geordneten Namen abgedruckt. Es ist nicht entscheidbar, welches Quadrat das beste ist, da in allen oskure Wörter auftauchen und sogar die Definition von „Wort" nicht ganz klar ist.

Einige Leser haben sich auch mit Quadraten vierter Ordnung beschäftigt. L. E. Card aus Urbana, Illinois, erreichte das Maximum (d. h. 20 Wörterbuchwörter):

S N A P
A E R A
R A I L
T R A P

"Tras" ist die Mehrzahl von "tra", einer malayischen Münze.

7. Fünf Gegenstände können mit einer Schalenwaage in nicht mehr als sieben Wägevorgängen ihrem Gewicht entsprechend gereiht werden:

1. Man wägt A und B; wir nehmen an, daß B schwerer ist.
2. Man wägt C und D; wir nehmen an, daß D schwerer ist.
3. Man wägt B und D; wir nehmen an, daß D schwerer ist.
   Nun haben wir schon drei Gegenstände gereiht. $D > B > C$.
4. Man vergleicht E und B.
5. Ist E schwerer als B, vergleichen wir es mit D. Ist E leichter als B, vergleichen wir es mit A. In jedem Fall können wir E in die schon bekannte Reihenfolge einordnen und haben somit schon vier Gegenstände geordnet. Wir nehmen folgende Reihenfolge an: $D > B > E > A$. Aus Schritt 2 wissen wir bereits, wie sich der letzte Gegenstand, C, zu D verhält. Um die Position von C herauszufinden, brauchen wir ihn deshalb nur mehr mit den drei anderen Gegenständen zu vergleichen. In unserem Fall bedeutet dies:
6. Man vergleicht C mit E.
7. Ist C schwerer als E, vergleicht man es mit B. Ist C leichter als E, vergleicht man es mit A.

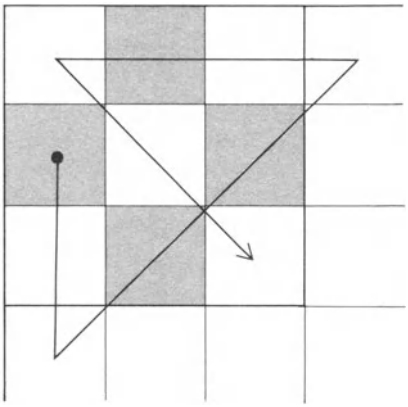
   Eine Verallgemeinerung dieses Problems, nämlich n Gegenstände in einer minimalen Anzahl von Wägevorgängen zu reihen (oder n Teilnehmer eines Turniers mit einer minimalen Anzahl von nicht unentschieden ausgegangenen Zweierwettkämpfen), ist erstmals von Hugo Steinhaus vorgeschlagen worden. Eine kurze Besprechung findet sich in der Ausgabe des Jahres 1959 seines "Mathematical Snapshots" und in "One Hundred Problems in Elementary Mathe-

matics" (New York: Basic Books, 1964) nahm er es als Aufgabe 52 (für $n = 5$) hinein. In der letzten, verbesserten Ausgabe von "Mathematical Snapshots" (New York: Oxford University Press, 1968) bringt Steinhaus eine Formel, die bis zu $n = 11$ richtige Lösungen liefert. (Von 1 bis 11 ist die minimale Anzahl von Wägevorgängen jeweils 0, 1, 3, 5, 7, 10, 13, 16, 19, 22 und 26.)

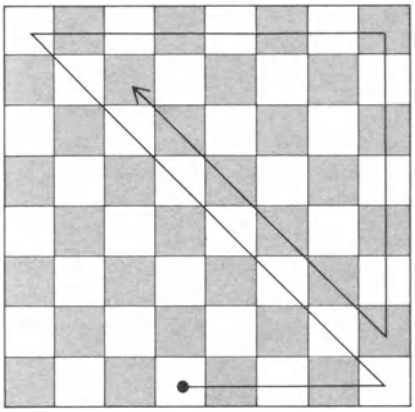
Für 12 Gegenstände sind nach dieser Formel 29 Schritte nötig, es ist aber schon bewiesen worden, daß die minimale Anzahl 30 ist.

Das verallgemeinerte Problem wird auch von Lester R. Ford und Selmer M. Johnson, die beide bei der Rand Corporation beschäftigt sind, in "A Tournament Problem" in der Zeitschrift "The American Mathematical Monthly", vom Mai 1969 behandelt. Eine neuere Besprechung findet man in Donald Knuths "Sorting and Searching" (New York: Addison-Wesley, 1971) in den Abschnitten 5-3-1.

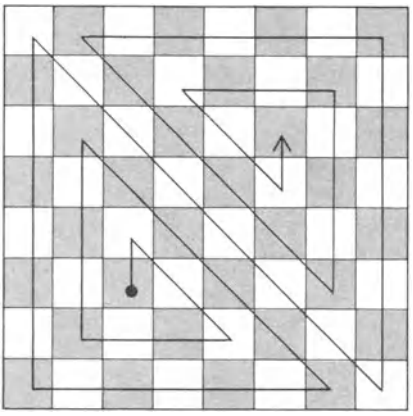
8. Die Lösungen zu den fünf Aufgaben, Schachtouren für die Damen zu finden, werden im Bild 92 gezeigt. Zu der vierten und der fünften Aufgabe gibt es noch weitere Lösungen, aber keine mit einer geringeren Anzahl von Zügen. Mancher Leser hat vielleicht das dritte Problem gelöst, indem er zuerst zur unteren rechten Ecke, hinauf zur oberen rechten Ecke, entlang der Hauptdiagonale zur unteren linken Ecke, hinauf zur oberen linken und dann sieben Felder nach rechts gezogen ist. Dieser Weg ist fast (aber nicht ganz so) lang wie der hier gezeigte.



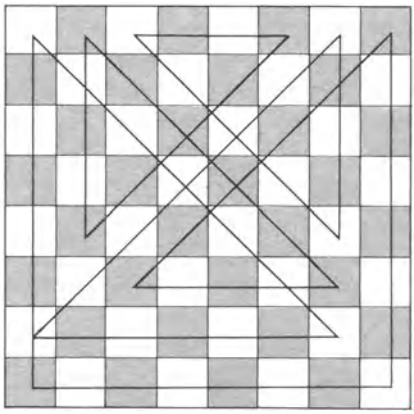
1



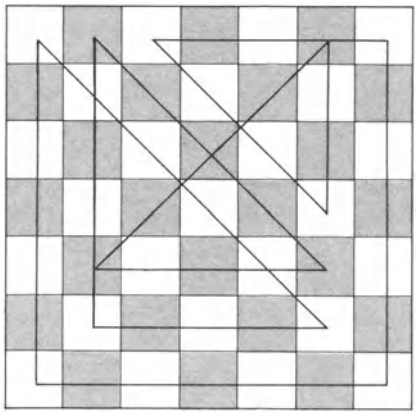
2



3



4



5

Bild 92
Lösungen zu den Schachtouren für die Dame

13 Die Zykloide: Helena der Geometrie

Dreht sich bei einem fahrenden Auto der obere Teil der Reifen schneller als der untere? Auf Grund dieser eigenartigen Frage haben sich genausoviele heftige Debatten ergeben, wie zu jenem alten Problem: Ein Mann geht rund um einen Baum, weil er das Eichkätzchen auf der gegenüberliegenden Seite sehen will. Während er jedoch geht, trippelt auch das Eichkätzchen eilig rund um den Baum, mit dem Bauch zum Stamm, so daß es immer auf der dem Mann gegenüberliegenden Seite bleibt und der Stamm es ständig verdeckt. Wenn der Mann einmal um den Baum herumgekommen ist, hat er dann auch das Eichkätzchen umkreist?

William James, der dieses gewichtige metaphysische Problem im zweiten Kapitel seines Buches "Pragmatism" behandelt, schließt, daß es allein darauf beruht, was man unter „rund herum" versteht. Genauso kann auch die Frage mit den Reifen nicht ohne vorherige Übereinkunft über die genaue Bedeutung aller Begriffe beantwortet werden. Definieren wir etwa, daß der „obere" und der „untere" Teil jene Punkte auf dem Reifen sind, die zu einem gegebenem Zeitpunkt am weitesten oben, bzw. unten sind. Unter „sich schneller drehen" wollen wir die horizontale Geschwindigkeit dieser Punkte im Vergleich zur Fahrbahn verstehen. Überraschenderweise bewegen sich, wie es scheint, die oberen Punkte schneller als die unteren.

Dies läßt sich durch einen sehr einfachen Versuch mit einer Konservendose demonstrieren. Man bedeckt den Boden der Dose mit weißem Papier und zeichnet mit einem schwarzen Stift acht Durchmesser wie die Speichen eines Rades auf dieses kreisförmige Blatt. Nun legt man die Dose seitlich auf eine Ebene und rollt sie in Augenhöhe hin und her. Man darf der Dose mit den Augen *nicht* folgen; man soll seinen Blick auf einen entfernten Gegenstand richten, damit die Augen sich nicht mit der Dose hin und her bewegen. Man sieht nun, daß die schwarzen Speichen nur in der unteren Hälfte des Rades erkennbar sind. Die obere Hälfte ist ein verschwommenes Grau. Der Grund liegt darin, daß die Speichen in der oberen Hälfte tatsächlich viel schneller vorbeiziehen als die Speichen in der unteren Hälfte. Dies war zur Zeit der Postkutsche eine so wohlbekannte Erscheinung, daß Künstler die Bewegung des Rades sogar oft dadurch andeuteten, daß sie nur die Speichen unterhalb der Achse einzeln erkennbar machten.

Im Bild 93 wird der Weg gezeigt, den ein Punkt, der auf dem Umfang des Kreises liegt, zurücklegt, wenn dieser Kreis entlang einer horizontalen Linie, ohne zu gleiten, die Strecke AB, also genau den Umfang des Kreises selbst, rollt. Die Lage des Kreises ist nach jeder Vierteldrehung eingezeichnet. Man nimmt an, daß sich der Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Es wird auch deutlich, daß dieser Punkt für einen Moment lang, und zwar am Boden bei A, stillsteht, seine Geschwindigkeit dann allmählich zunimmt, ihr Maximum am höchsten Punkt erreicht und dann abnimmt, bis der Punkt schließlich wieder den Boden berührt. Rollt das Rad weiter, so beschreibt der Punkt noch eine Reihe weiterer Bögen und kommt bei jeder Spitze für einen Moment zum Stillstand. Die Geschwindigkeit des Punktes entlang der Kurve entspricht in der

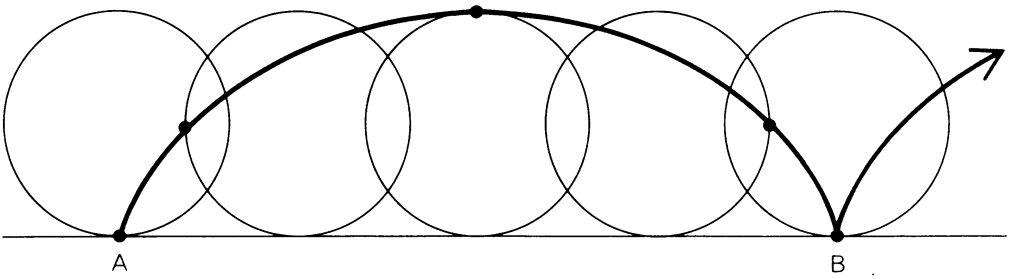


Bild 93 So wird eine Zykloide durch einen Punkt auf einem rollenden Kreis erzeugt

Physik der einfachen harmonischen Bewegung. Bei Rädern mit Spurkranz, wie beim Zug, bewegen sich die Punkte auf diesem Spurkranz sogar *zurück*, während sie unter der Ebene der Schienen eine kleine Schleife beschreiben.

Eine Kurve, die als Bahn eines Punktes einer auf einer anderen, rollenden, aber nicht gleitenden Kurve, entsteht, wird allgemein "Roulette" genannt. In unserem Fall rollt ein Kreis auf einer geraden Linie und erzeugt eine der einfachsten Rouletten, die Zykloide. Sie wurde nicht nur wegen ihrer schönen Eigenschaften die „Helena der Geometrie" genannt, sondern auch deshalb, weil sie der Gegenstand vieler historischer Auseinandersetzungen zwischen bedeutenden Mathematikern gewesen ist.

Es ist nicht bekannt, wer sich als erster ernsthaft mit der Zykloide auseinandergesetzt hat. Vor 1500 wird sie auf jeden Fall nicht erwähnt. Die erste richtige Abhandlung stammt von dem italienischen Physiker Evangeliste Toricelle, einem Schüler Galileos, aus dem Jahr 1644. Vierzehn Jahre später geschah es, daß Blaise Pascal, der die Mathematik zugunsten eines Lebens in religiöser Betrachtung aufgegeben hatte, an heftigem Zahnschmerz litt. Um sich vom Schmerz abzulenken, begann er, sich mit der Zykloide zu beschäftigen. Der Schmerz verging. Pascal wertete dies als Zeichen, daß seine Gedanken Gott nicht mißfielen und verbrachte die nächsten acht Tage mit dem intensiven Studium dieser Kurve. Seine beachtenswerten Ergebnisse wurden zuerst als eine Reihe von Herausforderungen für andere Mathematiker und später als Abhandlung über die Zykloide veröffentlicht.

Eine der Fragen zur Zykloide, die einem sofort in den Sinn kommt – aber gar nicht leicht zu beantworten ist – ist folgende: Wie lang ist die Zykloide? Man geht davon aus, daß der Durchmesser des Kreises, aus dem sie entsteht, 1 ist. Die Länge der Grundlinie AB ist dann natürlich π, eine irrationale Größe. Alle glaubten nun, daß auch die Länge der Kurve irrational sei. Sir Christopher Wren, der berühmte englische Architekt, war anscheinend der erste, der zeigte (im Jahr 1685), daß die Länge des Bogens der Zykloide, von Spitze zu Spitze, genau viermal die Länge des Kreisdurchmessers ist.

Die Fläche des Bogens war schon vorher gemessen worden und hatte auch eine Überraschung gebracht. Galileo hatte geglaubt, daß die Fläche $\pi \times$ Fläche des Erzeugerkreises sei; diese Abschätzung erhielt er, indem er den Bogen aus dünnem Material ausschnitt und sein Gewicht mit dem des Kreises verglich. Toricelli überraschte seine italienischen Kollegen mit dem Beweis, daß die Fläche unter dem Bogen genau dreimal so groß wie die Fläche des Kreises ist. Tatsächlich aber war dies schon früher von dem französischen Mathematiker Gilles Personne de Roberval gezeigt worden. Vielleicht hat Toricelli dies gewußt, vielleicht aber auch nicht. Pascal, wie auch Roberval selbst, beschuldigten Toricelli, Robervals Beweis absichtlich gestohlen zu haben. In Frankreich erklärte René Descartes, daß das ganze Problem ohnehin trivial sei. Er fand eine einfachere Methode, die Fläche zu berechnen und forderte Roberval heraus, Tangenten an die Zykloide zu konstruieren. Dies führte zu einer langen, bitteren Auseinandersetzung zwischen diesen beiden Männern. Heute werden alle diese Probleme schon in der elementaren Differentialrechnung behandelt (die Zykloide wird auch „Kurve der Studenten" genannt, weil die Lösungen so einfach sind), aber im siebzehnten Jahrhundert war diese noch nicht sehr weit entwickelt.

Die mechanischen Eigenschaften der Zykloide sind genauso bemerkenswert wie ihre geometrischen. Im Gymnasium lernt man oft, daß die Zeitspanne, in der ein Pendel hin und zurück schwingt, unabhängig von der Schwingungsweite immer gleich ist; dies ist jedoch nicht ganz richtig. Bei sehr großen Schwingungsweiten gibt es kleine Abweichungen. Entlang welchen Weges muß ein Pendel schwingen, damit seine Periode, unabhängig von der Amplitude, immer genau gleich groß ist? So eine Kurve, genannt Isochrone, wurde erstmals von dem holländischen Physiker Christoph Huygens entdeckt und 1673 von ihm veröffentlicht. Drehen wir zwei Zykloidenbögen so wie in Bild 94 um und lassen ein an einer Schnur befestigtes Pendel zwischen ihnen schwingen,

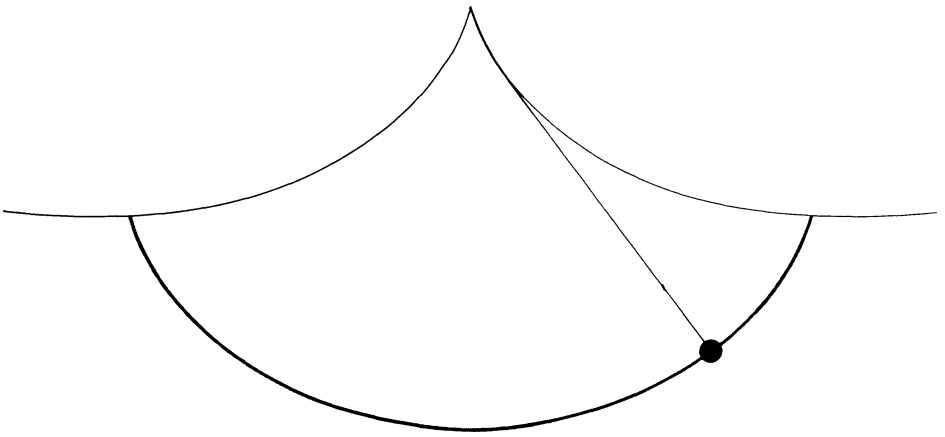


Bild 94 Ein isochrones Pendel, das zwischen zwei zykloidischen Seitenteilen schwingt, beschreibt eine Zykloide

so beschreibt dieses Pendel das, was man die Involute der Zykloide nennt. Es stellt sich heraus, daß die Involute der Zykloide wieder eine Zykloide derselben Größe ist und daß das zykloidische Pendel isochron ist.

Bei kleinen Schwingungsweiten ist der kreisförmige Bogen dem mittleren Teil der Zykloide so ähnlich, daß auch das kreisförmige Pendel beinahe isochron ist; unterscheiden sich die Schwingungsweiten nur gering, so pflanzt sich der „Kreisfehler" fort. Hat ein Sekundenpendel etwa einen kreisförmigen Bogen von zwei Grad, führt eine Vergrößerung auf drei Grad zu einem Verlust von 0,66 Sekunden pro Tag. Huygens baute eine Pendeluhr – die erste, die je hergestellt wurde – mit einem biegsamen Pendel, daß zwischen zykloidischen Seitenteilen schwingt. Unglücklicherweise entstand durch die Reibung an den Seitenflächen ein Fehler, der den durch den zykloidischen Weg korrigierten übertraf. Für die Uhrmacher ist es praktischer, die Anordnung so zu wählen, daß ein kreisförmiges Pendel eine konstante Amplitude einhält.

Huygens entdeckte auch, daß die Zykloide die Tautochrone oder Kurve der gleichen Fallzeit ist. Dazu stellt man sich eine Murmel vor, die sich im Inneren der Zykloide bewegt. Unabhängig davon, wo sie ihren Weg beginnt, wird die Murmel den tiefsten Punkt in der gleichen Zeit erreichen. (Melville bezieht sich im Kapitel 46 seines Buches „Moby Dick" auf diese interessante Eigenschaft der Zykloide, wenn er die Form eines Walfängers bespricht.) Wir stellen uns nun eine Schüssel vor, die so gewölbt ist, daß jeder Querschnitt durch den Mittelpunkt eine Zykloide ergibt. Verteilt man Murmeln an den Seitenwänden der Schüssel verschieden hoch und läßt sie gleichzeitig los, so erreichen sie den Mittelpunkt der Schüssel im selben Moment. Jede Murmel folgt einer einfachen harmonischen Bewegung, wie auch das isochrone Pendel.

Die Brachistochrone oder Kurve des *kürzesten* Falles, wurde erst viele Jahre später entdeckt. Es seien zwei Punkte A und B gegeben. Die Aufgabe besteht darin, eine A und B verbindende Kurve zu finden, auf der eine ohne Reibung rollende Murmel in der kürzest möglichen Zeitspanne von A nach B gelangt. Diese Aufgabe wurde erstmals von dem Schweizer Mathematiker und Physiker Johann Bernoulli in "Acta Eruditorum" gestellt, einer damals sehr bekannten wissenschaftlichen Zeitschrift. Sie wurde zuerst von Johanns Bruder Jakob gelöst (die beiden befehdeten sich), später auch von Johann selbst, dann von Leibniz, Newton und anderen. Newton löste sie, zusammen mit einem verwandten Problem, in 12 Stunden. (Er erhielt die Aufgabe um 4 Uhr am Nachmittag, hatte die Lösung um 4 Uhr in der Früh und sandte sie am folgenden Morgen ab.) Es stellte sich heraus, daß, wie der Leser zweifellos schon erraten hat, die Brachistochrone nichts anderes als die Zykloide ist. Johann Bernoullis Beweis ist ein klassisches Beispiel intuitiver Logik. Er stellte fest, daß dieses Problem mit jenem äquivalent sei, bei dem es sich um den Weg eines Lichtstrahls handelt, der von transparenten Schichten kontinuierlich zunehmender Dichte gebrochen wird. Für den interessierten Leser ist sein eleganter Beweis in Robert Courant und Herbert Robins' "What is Mathematics?" (New York: Oxford University Press, 1941) sehr gut erklärt, oder auch in Ernst Machs früherem Werk "Science of Mechanics" (Chicago: Open Court Publishing Company, 1893).

Es seien zwei Punkte A und B gegeben (Bild 95); wir wollen nun die Brachistochrone finden, die diese beiden Punkte verbindet. Zuerst suchen wir den Radius jenes Kreises, der, wenn er auf AC gerollt wird, eine Zykloide beschreibt, die in A beginnt

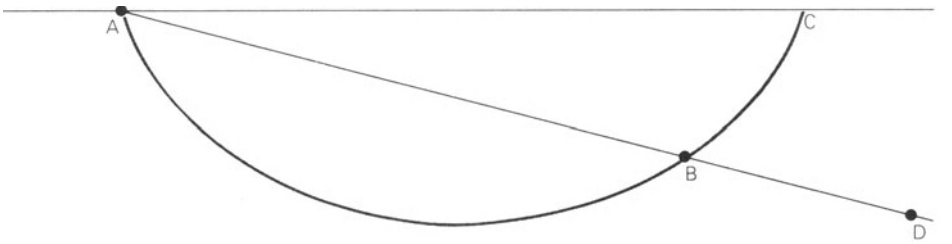


Bild 95 Auffinden der Kurve des kürzesten Falles zwischen A und B

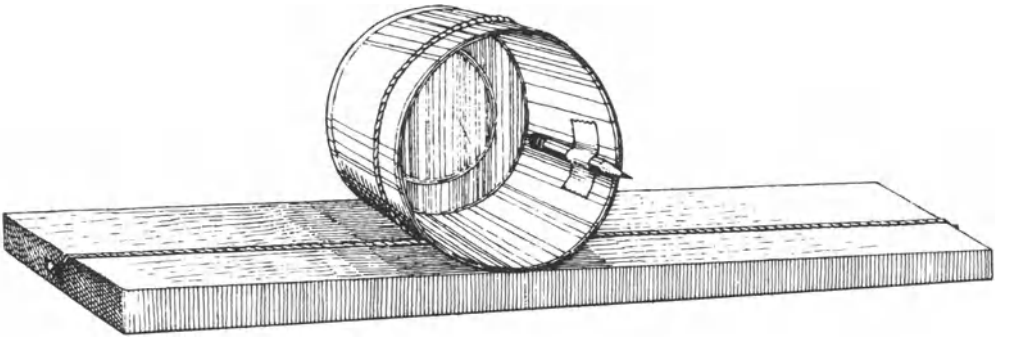


Bild 96 Konservendosenbehelf zum Zeichnen einer Zykloide

und durch B hindurchgeht. Um dies zu erreichen legen wir einen Kreis beliebiger Größe an die Linie AC und kennzeichnen jenen Punkt seines Umfanges, der in A liegt. Der Kreis wird nun entlang AC gerollt, bis dieser Punkt AB kreuzt. Angenommen dies geschieht im Punkt D. Da alle Zykloiden ähnliche Gestalt haben, wissen wir, daß sich AD zu AB so verhält, wie der Radius des großen Kreises, den wir gerade verwendet haben, zum Radius des kleineren Kreises. Rollt man den kleineren Kreis entlang AC, so beschreibt er eine Zykloide von A nach B.

Es ist bemerkenswert, daß in diesem Fall die Murmel sogar nach *oben* rollt, um B zu erreichen. Trotzdem erreicht sie B in kürzerer Zeit, als rollte sie entlang einer geraden Linie, eines Kreises oder irgendeiner anderen Kurve. Selbst wenn sich A und B auf derselben horizontalen Ebene befinden, rollt eine Murmel ohne Reibung so am schnellsten von A nach B. (Auf einer horizontalen Linie würde sie sich natürlich überhaupt nicht bewegen.)

Einem eifrigen Leser sollte es keine Schwierigkeit bereiten, ein Modell zu bauen, mit dem sich die Brachistochrone veranschaulichen läßt. Um eine große Zykloide zu zeichnen, kann man eine Koservendose verwenden. Schlingt man ein Stück Schnur einmal um die Dose und befestigt es an den Enden eines Brettes, wird die Dose nicht mehr gleiten, sondern entlang des Brettes rollen (Bild 96). Man befestigt einen dunklen

Farbstift derart an der Innenseite der Dose, daß der Stift, sobald sich die Dose bewegt, auf einem an der Wand befestigten Papier eine Zykloide beschreibt. Dies kann man nun als Vorlage verwenden, um aus steifem Draht eine Zykloide zu biegen, an der eine schwere Nuß hinuntergleitet, oder gar zwei Zykloiden, die eine Art Geleis bilden, auf dem eine Murmel rollen kann. Dieses Geleis kann man auch aus den zugeschnittenen Kanten zweier rechteckiger Stücke Furnierholz, oder steifen Pappdeckels zusammensetzen, die man senkrecht aufstellt und die Kanten durch kleine, angeklebte Holzstückchen genauso weit auseinanderhält, daß die Murmeln gerade darauf rollen können. Man kann nun für eine zweite bzw. dritte Murmel ähnliche Bahnen bauen, die aber kreisförmig bzw. gerade sind. Diese drei Modelle stellt man nun nebeneinander, so daß man durch das Entfernen eines horizontal gehaltenen Beistifts alle drei Murmeln gleichzeitig loslassen kann. (Stahlkugeln können elektromagnetisch festgehalten und durch Knopfdruck ausgelöst werden.) Münden alle drei Bahnen in dieselbe horizontale Bahn, so werden drei verschiedenfarbige Kugeln die gemeinsame Bahn immer in der gleichen Reihenfolge erreichen: zuerst die Kugel von der Zykloide, dann jene von der kreisförmigen Bahn und zuletzt jene, die auf der geraden Linie rollt.

Die Zykloide hat noch andere interessante mechanische Eigenschaften. Sie stellt, wie schon Galileo vermutete, den bestmöglichen Bogen einer Brücke dar; deshalb gibt es auch so viele Betonbrücken, deren Bogen in der Form einer Zykloide gebaut sind. Die Seiten von Zahnrädern sind oft in der Form der Zykloide geschnitten, um durch ein Abrollen beim Ineinandergreifen der Gänge die Reibung zu vermindern.

Rollt man einen Kreis auf einer geraden Linie, so entsteht eine Zykloide. In einem seiner Bücher kehrt Stanley C. Ogilvy die Fragestellung um: Entlang welcher Kurve muß man einen Kreis rollen, so daß ein Punkt, der auf seinem Umfang liegt, eine gerade Linie beschreibt? Um die Frage etwas dramatischer zu gestalten, soll man sich einen Eisenbahnwagon vorstellen, dessen Räder jeweils mit ihrem Rand an der Radwelle befestigt sind (Bild 97). Wie müssen die Schienen geformt sein, auf denen sich dieser eigenartige Zug ohne jemals auf und nieder zu hüpfen immer in der gleichen Ebene bewegt?

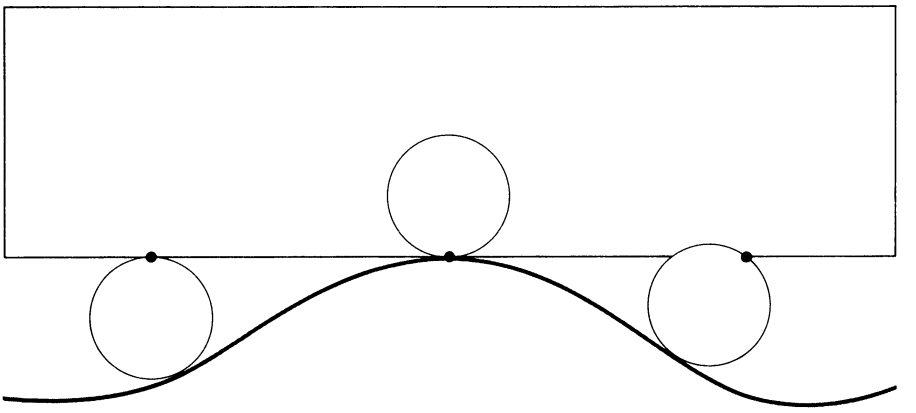


Bild 97 Auf welcher Art von Kurve bleibt das Auto immer horizontal?

Lösungen

Welche Schienen ermöglichen es dem Zug, ohne Auf- und Abzuhüpfen zu fahren? Bild 98 zeigt die überraschende Antwort: eine Folge von Halbkreisen! Rollt man einen Kreis entlang der Innenseite eines kreisförmigen Bogens, so beschreiben Punkte auf seinem Rand sogenannte Hyperzykloiden. Ist der Radius der Halbkreise, wie in unserem Fall, zweimal so groß wie der des rollenden Kreises, so ist die Hyperzykloide eine gerade Linie.

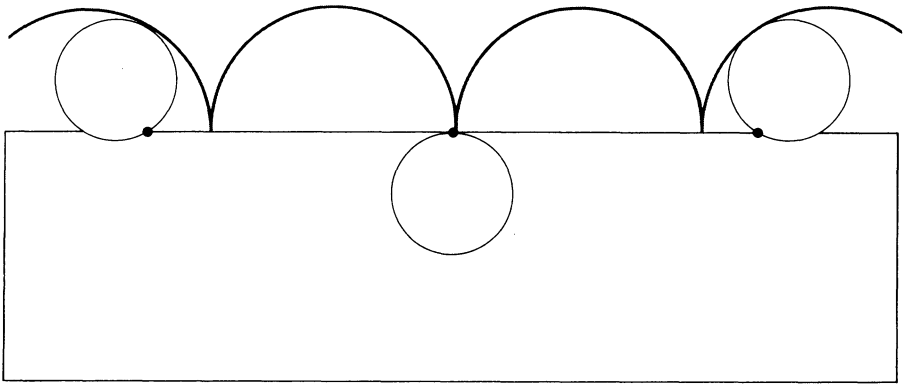


Bild 98 Lösung des Wagen-Problems

14 Mathematische Zaubertricks

Magische Tricks, die ganz oder zum Teil mit mathematischen Prinzipien operieren, faszinieren einen großen Teil der Zunft der Zauberkünstler. Jedes Jahr werden Dutzende solcher Tricks in Zeitschriften der Magie veröffentlicht oder zirkulieren zwischen den Zauberkünstlern, wobei nur gelegentlich Tricks ihren Weg in mathematische Kreise finden. Royal V. Heaths *Mathemagic* (1933) war das erste Buch auf diesem „Mischgebiet". Mein eigenes Buch *Mathematics, Magic and Mystery* (1956) war das zweite. 1964 brachte Scribner ein drittes: *Mathematical Magic* von William Simon heraus, der Präsident einer Firma in New Jersey ist, die Bremsbeläge herstellt und der einer der kenntnisreichsten Spielkartenexperten des Landes ist.

Die meisten Beiträge in Simons schöner Sammlung werden den Anhängern der unterhaltenden Mathematik fremd sein. Ein Beispiel daraus ist ein verwirrendes Kunststück im Gedankenlesen, das im Kapitel über Mentalmagie besprochen wird. Dieses Kunststück, das von Robert Hummer, einem jetzt in Havre de Grace in Maryland lebenden Zauberkünstler, erfunden wurde, ist nicht nur ein unterhaltsamer Gesellschaftstrick, sondern auch eine so verwirrende Übung in Logik, daß viele Zauberer, die das Kunststück regelmäßig vorführen, selbst nicht genau wissen, warum es wirklich funktioniert.

Eine der besten Demonstrationen ist folgende: Drei gleiche Kaffeetassen werden verkehrt in einer Reihe auf einen Tisch gestellt. Die Positionen (nicht die Tassen) sind – wie sie die Zuschauer sehen – eins, zwei und drei (Bild 99). Der Zauberer, der am anderen Ende des Raumes mit dem Rücken zum Tisch steht, bittet einen Zuschauer, einen kleinen Gegenstand, beispielsweise eine Zündholzschachtel unter irgendeiner der Tassen zu verstecken. Der Zuschauer bringt nun die Positionen der Tassen durcheinander, indem er sie paarweise austauscht und jedesmal die Positionen der zwei betreffenden Tassen ausruft. Bei einem solchen Austausch werden die Tassen so über den Tisch geschoben, daß der Gegenstand zusammen mit der ihn bedeckenden Tasse verschoben wird. Man stelle sich beispielsweise vor, die Zündholzschachtel sei unter der mittleren

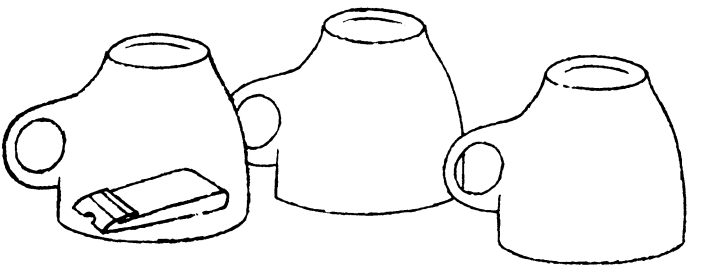


Bild 99 Hummers Drei-Tassen-Trick

Tasse versteckt. Vertauscht der Zuschauer die beiden äußeren Tassen, ruft er: „Eins und drei." Wenn er dann die zwei Tassen zu seiner Linken vertauscht, ruft er: „Eins und zwei." Werden nun diese Tassen verschoben, wird die Zündholzschachtel zusammen mit ihrer Tasse aus Position zwei in Position eins gebracht. Der Zuschauer fährt nun mit seinem paarweisen Austauschen der Tassen beliebig lange fort. Der Zauberer dreht sich hernach um und hebt sofort diejenige Tasse auf, unter der die Zündholzschachtel liegt. Der Trick kann oftmals wiederholt werden. Wie kann der Zauberkünstler richtig raten, wo ihm doch nie gesagt wird, unter welche Tasse der Gegenstand anfangs gelegt wurde?

Die Methode ist einfach und raffiniert. Obwohl die drei Tassen gleich sind, können sie unmöglich *ganz gleich* sein. Man sehe sich drei beliebige Tassen sorgfältig an und man wird sicherlich irgendein winziges Unterscheidungsmerkmal auf einer von ihnen finden – ein kleines abgebrochenes Stückchen, einen Farbfehler oder dergleichen. Bevor man sich umwendet, merke man sich die Position dieser markierten Tasse. Nachdem die Zündholzschachtel unter eine Tasse gelegt wurde, erkläre man dem Zuschauer das Austauschverfahren; dann bittet man ihn, probeweise die zwei leeren Tassen auszutauschen. Man warne ihn, dabei die beiden Positionen zu verraten, da dies ja die Position der Zündholzschachtel preisgeben würde. Diese probeweise Vertauschung scheint überhaupt keine Bedeutung für den Trick zu haben; tatsächlich vergessen die Zuschauer auch in der Regel, daß so etwas überhaupt gemacht wurde. In Wirklichkeit ist dies aber der Schlüssel des Tricks – den Grund dafür sollten Sie herleiten.

Während der Zuschauer mit seinem Vertauschen beschäftigt ist und dabei die Positionen der Tassen jedesmal ausruft, muß man heimlich der einen Tasse auf der Spur bleiben, indem man seine linke Hand als Computer verwendet. Finger eins, zwei und drei (Zeige-, Mittel- und Ringfinger) stehen für die Positionen eins, zwei und drei. Man beginne, indem man die linke Daumenspitze an diejenige Fingerspitze drückt, die die Anfangsposition der markierten Tasse angibt. Natürlich muß man annehmen, daß die markierte Tasse noch immer in dieser Position ist. Nehmen wir an, daß diese Tasse zu Beginn in der Mitte stand. Man berührt also den zweiten Finger. Wenn der Zuschauer eins und zwei ausruft, bewegt man den Daumen vom zweiten zum ersten Finger. Ruft er dann eins und drei aus, wechsle man zum dritten Finger. Nennt er dann eins und zwei, so bewegt man den Daumen nicht: Die Position der Tasse, die man verfolgt, ist durch die Vertauschung nicht betroffen. Sagen wir, der Daumen berührt den dritten Finger, wenn der Zuschauer beschließt, aufzuhören.

Dann dreht man sich um und betrachtet die Tassen. Steht die markierte Tasse in der Position drei, wo sie laut Daumen stehen sollte, weiß man, daß unter dieser Tasse die Zündholzschachtel liegt. Wenn die markierte Tasse nicht in Position drei steht, wird der Gegenstand unter derjenigen *nicht markierten* Tasse liegen, die *nicht* in Position drei steht. (Können Sie erklären, warum?)

Einige Zauberkünstler haben ein künstliches Auge bei sich und verwenden dieses bei dem Trick. Er benutzt das Auge als denjenigen Gegenstand, den er unter eine Tasse legt. Er bringt die Zuschauer zur Schlußfolgerung, daß das Auge ihm anzeigt, wo es sich befindet. Das Auge bietet auch die Möglichkeit für ein amüsantes Geplauder. Der Zauberer kann etwa sagen: „Ja, ich kann das Teufelsauge aus dem Inneren *dieser* Tasse auf mich starren sehen .... "

Harry Lorayne, ein Experte in der Mnemotechnik aus New York City (der in Gesellschaftskreisen wegen seiner sensationellen Gedächtnisnummern wohlbekannt ist), erfand folgende Abwandung, bei der drei Gegenstände anstelle von Tassen benützt werden. Der Zauberer ist imstande, den gedachten Gegenstand zu nennen, ohne sich umzudrehen. Drei verschiedene Gegenstände – z. B. eine Münze, eine Zündholzschachtel und ein Ring – werden in einer Reihe aufgelegt. Ein Zuschauer wird aufgefordert, an einen der drei Gegenstände zu denken. Er muß auch imstande sein, sich an die Reihenfolge der Gegenstände zu erinnern; wenn nicht, sollte er sich diese notieren. Der Zauberkünstler dreht sich um und bittet um eine probeweise Austauschung der zwei Gegenstände, an die der Zuschauer nicht gedacht hat. In diesem Fall sagt der Zuschauer nicht, welchen Austausch er gemacht hat. Der Trick läuft dann so ab wie derjenige mit den drei Tassen, wobei der Zuschauer die Gegenstände austauscht und die Positionen ausruft. Wenn er damit aufhört, fragt der Zauberkünstler, ob die Gegenstände zufällig wieder in ihrer ursprünglichen Reihenfolge daliegen. Wenn dies nicht der Fall ist, hat der Zuschauer eine oder zwei zusätzliche Austauschungen vorzunehmen, welche notwendig sind, um diese Reihenfolge wieder herzustellen. Diese Austauschungen werden wie vorhin ausgerufen. Der Zauberkünstler scheint keine relevante Information zu haben – die Gegenstände sind nur wahllos ausgetauscht worden und in die Ausgangsstellung zurückgebracht worden – trotzdem kann der Zauberer den gedachten Gegenstand nennen, *ohne sich umzudrehen.*

Die Methode ist folgende: Man merke sich die ursprüngliche Anordnung. Man wähle irgend einen Gegenstand aus und verfolge ihn mit dem Daumen. Man wird natürlich nicht wissen, ob jener Gegenstand bei dem Probeaustausch in seiner ursprünglichen Lage verblieben ist oder nicht. Zeigt der Daumen am Ende (nachdem die ursprüngliche Reihenfolge wieder hergestellt wurde) an, daß der verfolgte Gegenstand wieder in seiner Ausgangsposition ist, weiß man trotzdem, daß dies der gedachte Gegenstand ist. Im anderen Fall ist der gedachte Gegenstand derjenige, der in der Position liegt, die weder mit der Start- noch Endposition des mitzählenden Daumens übereinstimmt. Können Sie wieder die Erklärung finden?

Bevor ich dieses Kapitel zu schreiben begann, setzte ich mich mit Robert Hummer in Verbindung und erhielt seine Einwilligung, einen weiteren seiner seltsamen „Gedankenlesetricks" zu beschreiben, der hier zum erstenmal in einer Veröffentlichung erklärt wird. Für den Trick benötigt man eine Kreisscheibe aus Karton, die auf einer Kartonunterlage im Mittelpunkt drehbar befestigt ist. Am Rand der Kreisscheibe sind in beliebiger Reihenfolge die Zeichen der 26 roten Spielkarten angeschrieben. Auf der Kartonunterlage sind außerhalb der Kreisscheibe die 26 Buchstaben des Alphabets notiert. Auch sie können in beliebiger Reihenfolge auftreten, aber Hummer ordnet sie so an wie Bild 100 zeigt, so daß die zehn Buchstaben im oberen Abschnitt den Satz "Think a word" ergeben.

Ein Zuschauer wird ersucht, an ein beliebiges Wort zu denken, möglichst an ein kurzes Wort mit vier bis fünf Buchstaben. Weiterhin soll er an irgendeine rote Spielkarte denken. Während der Zauberkünstler sich umdreht, dreht der Zuschauer die Kreisscheibe, bis seine gewählte Karte mit dem ersten Buchstaben seines Wortes übereinstimmt. Darauf dreht sich der Zauberer um und wirft einen kurzen Blick auf die Drehscheibe, um sich anschließend wieder wegzudrehen. Hierauf dreht der Zuschauer wiederum die Kreis-

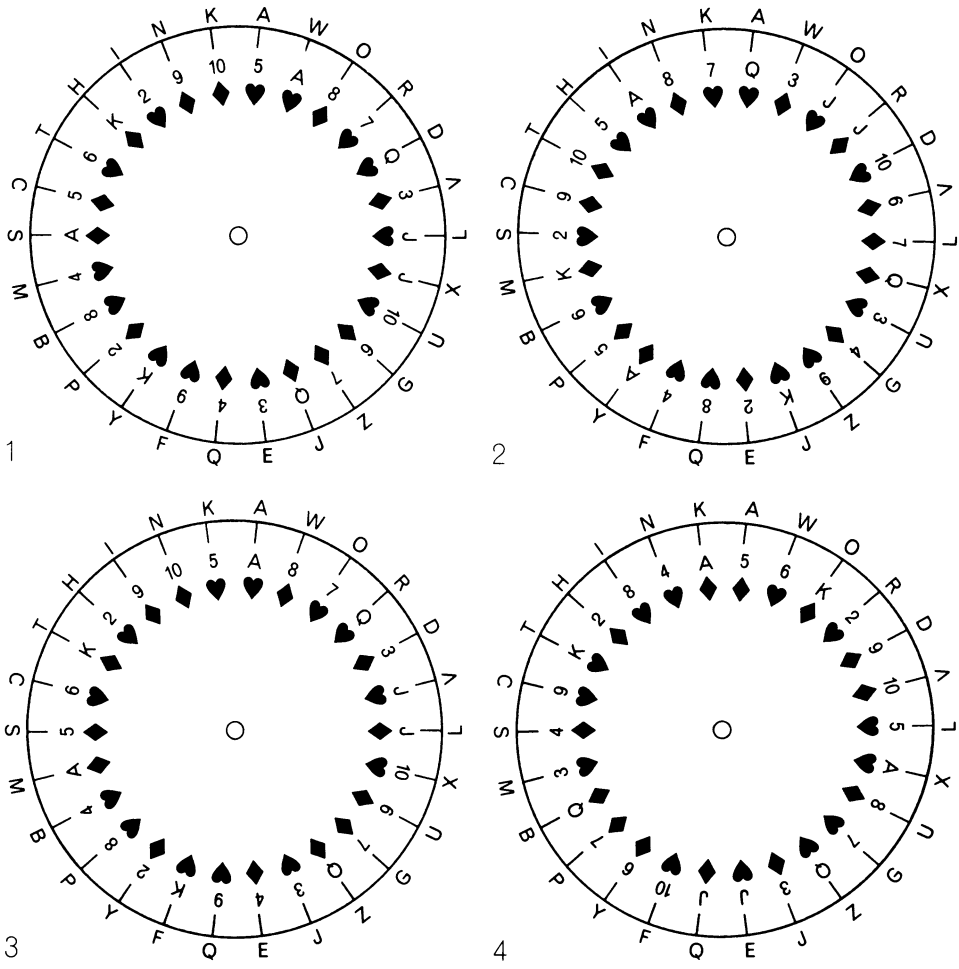


Bild 100 Der "Think a word"-Trick

scheibe, so daß seine Karte auf den zweiten Buchstaben seines Wortes weist. Wieder wirft der Zauberer einen Blick auf die Scheibe. Offensichtlich kennt er die gedachte Karte des Zuschauers nicht, so daß ihm die Kreisscheibe offenbar keine nützliche Information liefert. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis das ganze Wort durchbuchstabiert ist. Nachdem der Zauberkünstler vorgibt, sich einen Augenblick zu konzentrieren, nennt er sowohl das Wort als auch die Karte.

Ein Mathematiker, der sich mit Kombinatorik beschäftigt, oder ein Experte für Geheimschriften wird mit wenig Schwierigkeiten eine Methode erfinden, um diesen Trick mit der Kreisscheibe auszuführen. Für alle anderen formuliere ich es als Puzzle.

Die vier Positionen der Kreisscheibe im Bild 100 sind typisch dafür, was der Zauberkünstler während des „Buchstabierens" eines Wortes mit vier Buchstaben sehen könnte. Was für ein Wort wird hier buchstabiert? Es ist nicht schwer, das Wort durch mühevolles Testen jeder der 26 roten Karten herauszufinden; aber der Zauberer braucht ja eine Methode, um das Wort wenige Sekunden nach Betrachten der Endposition zu nennen.

Einer der besten, von Jack Yates, einem britischen Zauberkünstler, erfundenen mathematischen Tricks ist der sogenannte "12-penny-Trick": dieser wird von Simon in einem Kapitel über Tricks mit Alltagsgegenständen erklärt. Die 12 Penny-Stücke werden mit dem Kopf nach oben in einem Kreis so aufgelegt, daß sie die 12 Stunden einer Uhr anzeigen. Das Penny-Stück „bei 12 Uhr" wird mit einem Schlüssel markiert (Bild 101). Während der Zauberer sich wegdreht, soll ein Zuschauer sechs beliebige Münzen umdrehen. Der Zauberkünstler gibt darauf – wobei er weiterhin weggedreht bleibt – Anweisung, sechs weitere Münzen umzudrehen. Dies wird wahrscheinlich auch einige bereits vom Zuschauer umgedrehte Penny-Stücke betreffen; d. h. einige Penny-Stücke, die beim erstenmal umgedreht wurden, können demnach nach dem zweitenmal wieder mit dem Kopf nach oben schauen.

„Wie viele „Köpfe" sind nun zu sehen?", fragt der Zauberkünstler.

Angenommen, die Antwort lautet: „Zwei". Offensichtlich kann der Zauberer nicht wissen, welche Münzen mit dem Kopf nach oben schauen und welche nicht. Trotzdem ist er imstande, Anweisungen zu geben, die Münzen so in zwei Mengen zu je sechs Stück

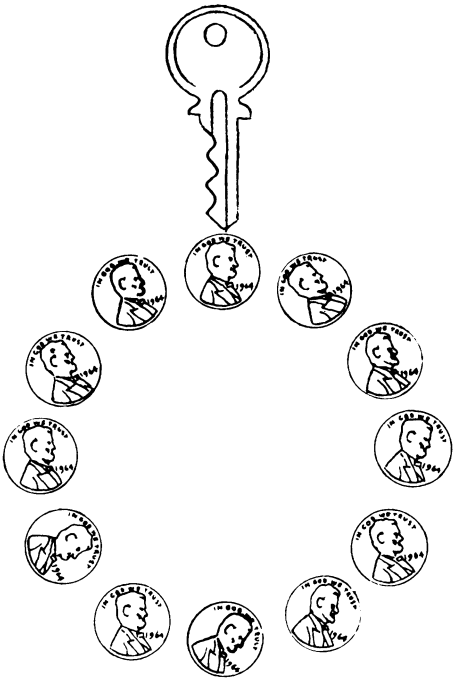


Bild 101
Yates' 12-penny-Trick

zu teilen, daß jede dieser beiden Mengen gleich viele nach oben schauende „Köpfe" (und Rückseiten) enthält. In unserem Fall würden in jeder der beiden Mengen ein Kopf und fünf Rückseiten nach oben schauen.

Erstaunlicherweise muß dem Zauberer die Anzahl der nach oben schauenden „Köpfe" gar nicht mitgeteilt werden, aber indem er um diese Information ersucht, lenkt er die Zuschauer von der zur Lösung führenden Spur ab. Wenn er die zweite Anweisung für das Umdrehen von sechs Münzen gibt, kann er selbst sechs beliebige auswählen, aber er muß sich ihre „Nummern" merken. Zum Beispiel kann er bitten, die Münzen eins (bei „ein Uhr"), vier, fünf, acht, neun und zehn umzudrehen. Um die Münzen nun richtig in die zwei endgültigen Mengen zu trennen, ersucht er, die folgenden sechs Münzen auf die Seite zu schieben: 2, 3, 6, 7, 11 und 12. Dies sind einfach die sechs, die in der vorigen Menge nicht enthalten sind. (In der Mengenlehre sagt man, daß diese das „Komplement" der vorigen Menge bilden.) Um diese Auswahl der Münzen für die zweite Menge zu verschleiern, gibt der Zauberer Anweisung, diese Münzen paarweise – gewissen Tageszeiten entsprechend – wegzuschieben. Anstatt beispielsweise einfach Münze zwei und drei anzugeben, sagt er: „Schieben sie bitte die Münzen, die auf zehn Minuten nach drei Uhr liegen, weg."

Die Prinzipien aus der Mengenlehre, die man dabei ausnützt, sind die Basis für zahlreiche Kartentricks. Der folgende, von dem britischen Zauberkünstler Norman Mac Cleod in der Zeitschrift für Zauberkunst "The New Phoenix", (Nr. 328, August 1955) in den USA veröffentlichte Trick ist einer der besten. Während der Teilnehmer die Bridgekarten in vier Teile austeilt, schreibt der Zauberer folgendes auf ein Blatt Papier: „Es werden 22 Karten mit dem Bild nach oben zu liegen kommen." Diese Voraussage wird gefaltet und zur Seite gelegt. Ein Zuschauer nimmt zwei der ausgeteilten Kartenpakete, der Zauberer die anderen beiden.

„Ich habe eine Zahl zwischen eins und zehn gewählt", verkündet der Zauberer. „Ich werde nun in jedem der beiden Pakete diese bestimmte Anzahl von Karten nach oben drehen." Er dreht nun einige Karten um, ohne jedoch dabei jemanden mitzählen zu lassen.

Den Zuschauer ersucht er, mit seinen zwei Kartenpaketen dasselbe zu machen: eine Zahl zwischen eins und zehn zu wählen und diese Anzahl von Karten in jedem Paket nach oben zu drehen. Die vier Kartenpakete werden hierauf eingesammelt und aufgelegt und die Zahl der nach oben schauenden Karten gezählt. Es sind 22. Die Voraussage wird gelesen und als richtig bestätigt.

Um diesen Trick ausführen zu können, muß man etwas schwindeln. Jede gerade Zahl zwischen 13 und 39 kann als Voraussage niedergeschrieben werden. Diese Zahl minus 13 ergibt die Gesamtzahl der Karten, die man in den eigenen zwei Kartenpaketen *nach unten* schauen läßt. In unserem Fall ist 22 minus 13 gleich 9; d.h., man dreht beispielsweise in einem Paket alle außer 5 Karten um, im anderen alle außer 4. Nun legt man die eigenen zwei Pakete aufeinander und eines der beiden Pakete des Zuschauers oben drauf. Dieses große Paket halte man in der linken Hand und ersuche den Zuschauer, sein restliches Kartenpaket in zwei Teile zu teilen. Während die Aufmerksamkeit vollkommen diesem Teilen gilt, drehe man das in der eigenen linken Hand befindliche Kartenpaket heimlich um, wodurch natürlich alle Karten umgedreht werden. Dieses große Paket wird dann zwischen die zwei Hälften des geteilten Paketes gelegt.

Nun liegen wieder alle Karten beisammen und vermutlich weiß niemand, wie viele von ihnen mit dem Bild nach oben schauen. Wissen Sie, warum es 22 sein müssen? Bei dieser Vorgangsweise werden immer 13 Karten der beiden Pakete des Zuschauers nach oben gedreht. Das Prinzip ist dasselbe, nach dem Yates' Münzentrick funktioniert. Die neun Karten, die man selbst nach unten schauen läßt, schauen jetzt nach oben und ergeben mit den restlichen 13 insgesamt 22. Der Trick kann mit einer beliebigen geraden Zahl in der Voraussage wiederholt werden. Ungerade Zahlen sollten vermieden werden, denn wenn man den Vorgang ehrlich ausführen würde, könnte keine ungerade Anzahl von Karten nach oben schauen.

Das magische Verketten und Entketten von Ringen kann – falls man den Begriff etwas dehnt – als topologischer Effekt betrachtet werden. Ich habe hier noch Platz für einen kurzen Trick, der von William Bowman, einem Zauberer aus Seattle erfunden wurde und in Simons Kapitel über topologische Zauberkunststücke beschrieben wird. Man befestige zwei Büroklammern an einem Geldschein (Bild 102). Zieht man nun den Geldschein an den Enden flach auseinander, so schießen die beiden Klammern geradezu vom Geldschein herunter – und zwar *ineinander verkettet*. (Diese Verkettung ist schon rätselhaft, aber warum springen die Klammern mit solcher Kraft vom Geldschein?) Simon hat eine Geschichte über eine junge Liebe auf Lager, die ihm genug Stoff liefert, um über all dies zu schwatzen. Ich ziehe es vor, daß man den Zuschauer den Geldschein so halten läßt, daß die Klammern nach unten zeigen. Wird der Geldschein nun flach auseinander gezogen, fallen die Klammern auf den Fußboden. Man wette um jeden Betrag, daß sie höchstens zwei bis drei Zentimeter voneinander entfernt zu liegen kommen werden. Es ist natürlich unmöglich, daß man verliert.

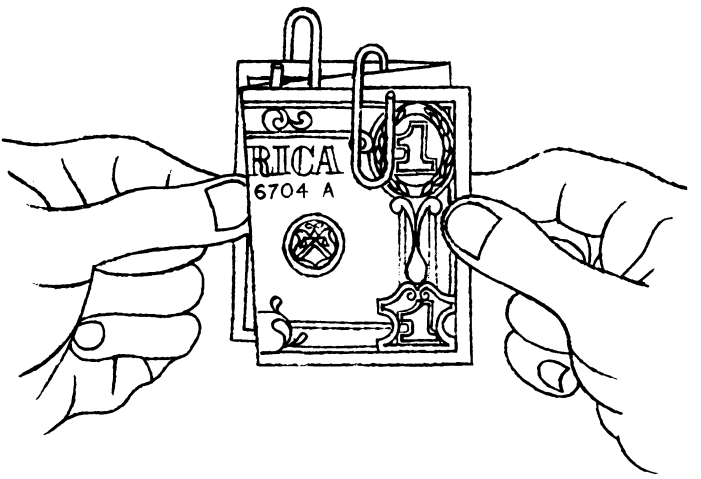


Bild 102 Bowmans Trick mit dem Geldschein

Lösungen

In dem Bild zum "Think a word"-Trick ist das Wort mit den vier Buchstaben, das buchstabiert wird, "love" und die Karte, an die gedacht wird, ist der Herzbube. Um das Wort herauszufinden, verwendet der Zauberer eine kleine Vorrichtung: einen Zylinder aus fünf Scheiben, die um einen Stift rotieren können (Bild 103). Die Zeichen der 26 roten Spielkarten sind auf der ersten Scheibe in derselben Reihenfolge wie auf der „Buchstabierkreisscheibe" im Bild 100 angeordnet; auf jeder der anderen vier Scheiben sind die 26 Buchstaben – ebenfalls in derselben Reihenfolge wie im Bild 100 – angeordnet.

Wird der erste Buchstabe des Wortes „buchstabiert", schaut der Zauberer kurz auf die Drehscheibe und merkt sich denjenigen Buchstaben, der irgendeiner beliebigen Spielkarte – sagen wir dem Herzas – gegenüberliegt. Sowie er sich wieder weggedreht hat, verdreht er die zweite Scheibe seiner kleinen Vorrichtung so, daß dieser Buchstabe in einer Linie mit dem Herzas steht. Bei seinem zweiten Blick auf die Drehscheibe merkt er sich den neuen Buchstaben beim Herzas und stellt nach dem Wegdrehen die dritte Scheibe seiner Vorrichtung entsprechend ein. Dasselbe wiederholt er für die restlichen zwei Buchstaben. In anderen Worten: Der Zauberkünstler wählt selbst eine Karte aus und verwendet sie, um damit vier Buchstaben zu buchstabieren. Er stellt seine Vorrichtung so ein, daß diese Karte und diese vier Buchstaben in einer Reihe stehen. Dann dreht er den ganzen Zylinder, bis er ein Wort mit vier Buchstaben erkennt. Dieses ist das Wort, das der Zuschauer buchstabiert hat. Natürlich besteht die Möglichkeit, daß mehr als ein Wort auftritt, aber die Wahrscheinlichkeit ist äußerst gering. Sollte dies passieren, dann äußert der Zauberer einfach mehrere Vermutungen.

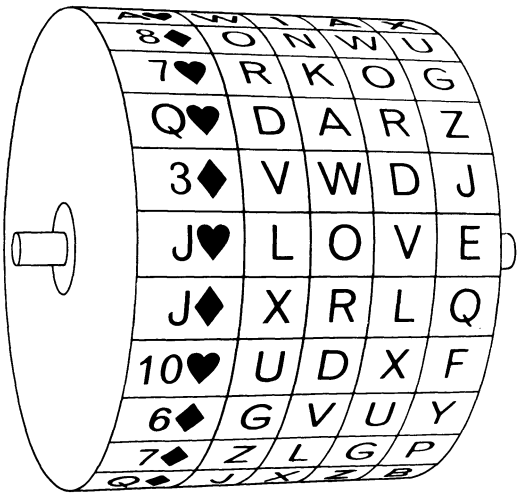


Bild 103
Die Vorrichtung für den "Think a word"-Trick

Die Vorrichtung kann klein genug gemacht werden, um sie in einer Hand zu verbergen. Eine ähnliche Vorrichtung kann man dadurch herstellen, daß man vier Kreisscheiben von gestaffelter Größe konzentrisch auf einem quadratischen Kartonstück montiert. Dies kann in eine Rocktasche des Zauberkünstlers gesteckt werden, um nach dem Wegdrehen immer heimlich hervorgezogen und eingestellt zu werden. Indem man mehr als vier Kreisscheiben am Karton montiert (oder den obigen Zylinder aus mehr als fünf Scheiben zusammensetzt) kann man den Trick mit längeren Wörtern ausführen. Bei langen Worten kann man die einzig mögliche Buchstabenkombination oft schon vor dem Ende des Buchstabierens erkennen und so das Wort erraten. In solchen Fällen wird der letzte Blick auf die Drehscheibe die Vermutung bestätigen und der Zauberer kann das Wort gleich nennen, ohne sich nochmals wegzudrehen.

Manche Zauberer lassen auf ihrer Vorrichtung die Kartensymbole völlig weg. Dies beeinflußt ihre Fähigkeit, das Wort zu erraten, nicht. Wenn sie jemand fragt, ob sie auch die ausgewählte Karte wissen, können sie – ohne zu lügen – sagen, daß sie nicht die leiseste Idee davon haben.

15 Der Pythagoreische Lehrsatz

Ein Lehrsatz wie „Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Seiten" ist heute noch genauso strahlend schön wie er es damals war, als Pythagoras ihn zum erstenmal entdeckte und, wie man erzählt, sein Erscheinen durch das Opfer einer großen Anzahl von Ochsen feierte – eine Art, der Wissenschaft Ehre zu erweisen, die mir immer leicht übertrieben und unangebracht erschienen ist. Man kann sich – selbst in diesen degenerierten Zeiten – vorstellen, daß man der Epoche einer brillianten wissenschaftlichen Entdeckung dadurch ein Zeichen setzt, daß man ein oder zwei fröhliche Freunde auf ein Beefsteak und eine Flasche Wein einlädt. Aber eine große Anzahl von Ochsen! Dies würde eine völlig ungelegen kommende Menge von Fleisch ergeben!

Lewis Caroll, "A New Theory of Parallels"

Das erste Kapital von Arthur Schopenhauers großem philosophischen Werk „Die Welt als Wille und Vorstellung" enthält einen harten Angriff auf die Methode Euklids, Lehrsätze zu beweisen; im speziellen gilt dieser Angriff dem berühmten siebenundvierzigsten Lehrsatz. Dies ist das bekannte Theorem, das im allgemeinen Pythagoreischer Lehrsatz genannt wird und aussagt, daß das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche hat, die gleich der Summe der Flächen der Quadrate auf den anderen zwei Seiten ist. Dies ist natürlich eines der ältesten und unentbehrlichsten Theoreme der gesamten Mathematik.

Euklids Beweis ist, wie viele Leser es sicher noch aus den Geometrielehrbüchern ihrer Schulzeit wissen, ziemlich kompliziert. Konstruktionslinien werden hier und dort gezogen, sagt Schopenhauer, ohne daß man ihre Notwendigkeit erkennen kann; dann wird man durch eine lange Kette deduktiver Beweise geschleppt, bis der Beweis plötzlich wie eine Mausefalle zuschnappt. Man ist gezwungen, zuzugeben, daß die Schlußfolgerung richtig ist, aber irgendwie fühlt man sich betrogen. Man „sieht" die Richtigkeit des Beweises nicht. Laut Schopenhauer fühlt man sich wie ein Arzt, der sowohl die Krankheit als auch das Mittel dagegen kennt, der aber keine Ahnung hat, warum das Mittel wirkt. Der Beweis ist ein „brilliantes Stück von Perversität". Er schmuggelt seine Wahrheit bei einer Hintertür herein, anstatt sie uns offen als eine direkte Intuition von räumlichen Beziehungen zu geben.

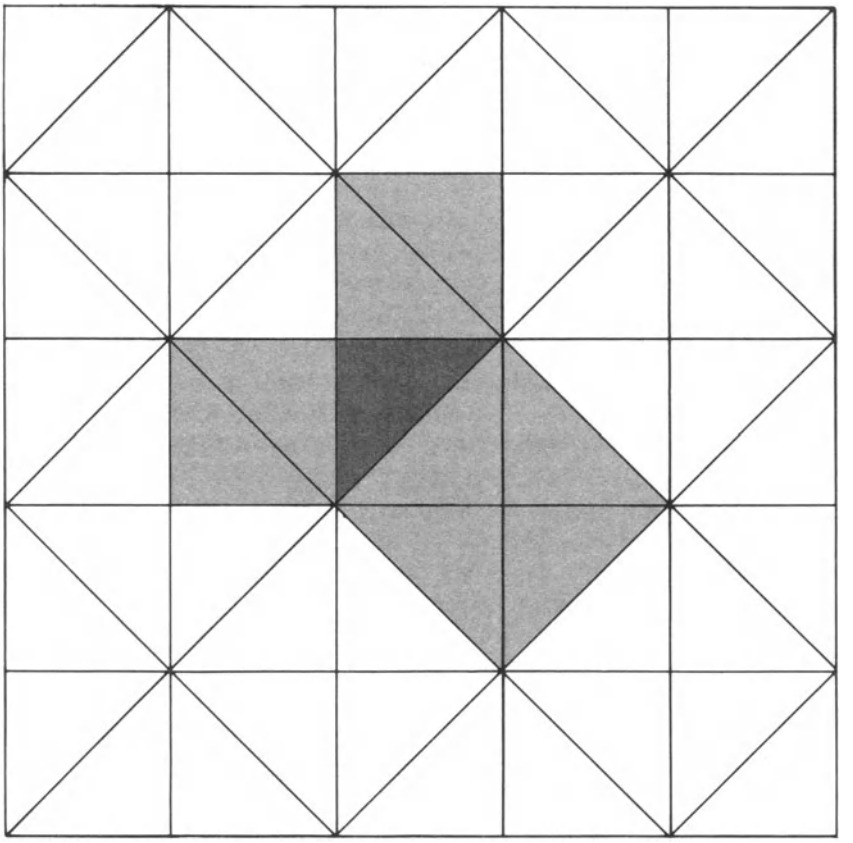


Bild 104 Ein Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes für ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck

Ein viel besseres Verständnis für das Theorem erhält man, fährt Schopenhauer fort, indem man ein Diagramm wie im Bild 104 betrachtet. Man sieht sofort, daß die Quadrate über den zwei Schenkeln des gerasterten Dreiecks sich aus vier kongruenten Dreiecken zusammensetzen, die zusammen das Quadrat über der Hypotenuse ergeben. Ein im wesentlichen gleiches Diagramm wird von Sokrates (in Platos „Meno") verwendet, um einen jungen Sklaven von der Richtigkeit des Theorems zu überzeugen. Wie töricht ist es, sagt Schopenhauer, sich über Euklids unwegsames Gelände zu plagen, wenn man das Ziel doch direkt über eine „helle, sichere Straße" erreichen kann.

Schopenhauers Argumente sind naiv: Der Beweis, den er empfiehlt, betrifft nur einen Spezialfall, das gleichschenklige, rechtwinklige Dreieck, und beweist das Theorem bei weitem nicht. Trotzdem bleibt wegen des pädagogischen Wertes einfacher Beweise, die ein Maximum intuitiver Einsicht geben, noch einiges zu sagen. Man betrachte die

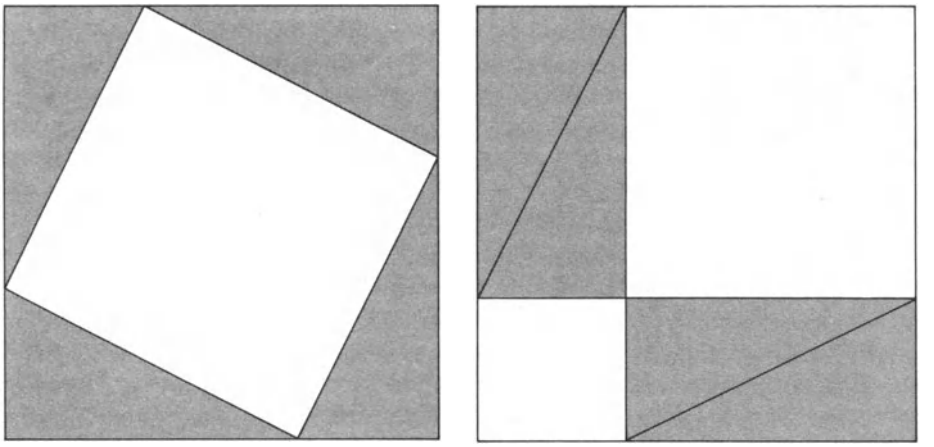


Bild 105 Ein Beweis des Theorems für beliebige rechtwinklige Dreiecke, der durch bloßes Betrachten zu verstehen ist.

linke Figur im Bild 105. Es ist klar, daß *jedes* rechtwinkelige Dreieck viermal dupliziert und nach diesem Muster angeordnet werden kann. Das schrägliegende, weiße Quadrat in der Mitte – das Quadrat über der Hypotenuse – hat eine Fläche, die gleich der Fläche des großen Quadrats minus der Summe der Flächen der vier gerasterten Dreiecke ist. Nun ordnet man die vier Dreiecke innerhalb desselben großen Quadrats so an, wie es in der rechten Figur im Bild 105 gezeigt wird. Die zwei weißen Quadrate sind die Quadrate über den Schenkeln des Dreiecks. Da die Summe ihrer beiden Flächen ebenfalls gleich der Fläche des großen Quadrats minus der Summe der Flächen der vier Dreiecke ist, weiß man, daß diese gleich der Fläche des schrägliegenden weißen Quadrates in der linken Figur im Bild 105 sein muß.

Niemand weiß, wer diesen schönen Beweis als erster erdachte, aber es könnte schon vor Pythagoras gewesen sein. Die Figur links im Bild ist im *Chou Pei* enthalten, einem chinesischen Manuskript, das auf die Han-Periode (202 v. Chr. - 220 n. Chr.) zurückgeht. Aber es wird angenommen, daß es wesentlich älteres mathematisches Material enthält. Obwohl dieses Manuskript keinen wirklichen Beweis liefert, erwähnt es den rechten Winkel in einem Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 und viele Gelehrte glauben, daß die Figur in einem Beweis, ähnlich dem eben erklärten, eine Rolle spielte. Von Pythagoras, der ungefähr 500 v. Chr. lebte, nimmt man an, daß er das Theorem bewiesen hat (die Legende erzählt, daß er einhundert Ochsen opferte, als er das Theorem entdeckte), aber es ist kein Beweis von ihm erhalten. Jüngste Forschungen haben ans Licht gebracht, daß die alten Babylonier – mehr als tausend Jahre vor der Zeit des Pythagoras – sowohl das Theorem als auch viele verschiedene Arten von rechtwinkeligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen kannten. Es gibt jedoch *keinen* Beweis dafür, daß die Ägypter das Theorem oder das 3, 4, 5-Dreieck kannten. Der Mythos, daß sie es kannten, reicht bis zum Jahr 1900 zurück, als Moritz Cantor, ein deutscher

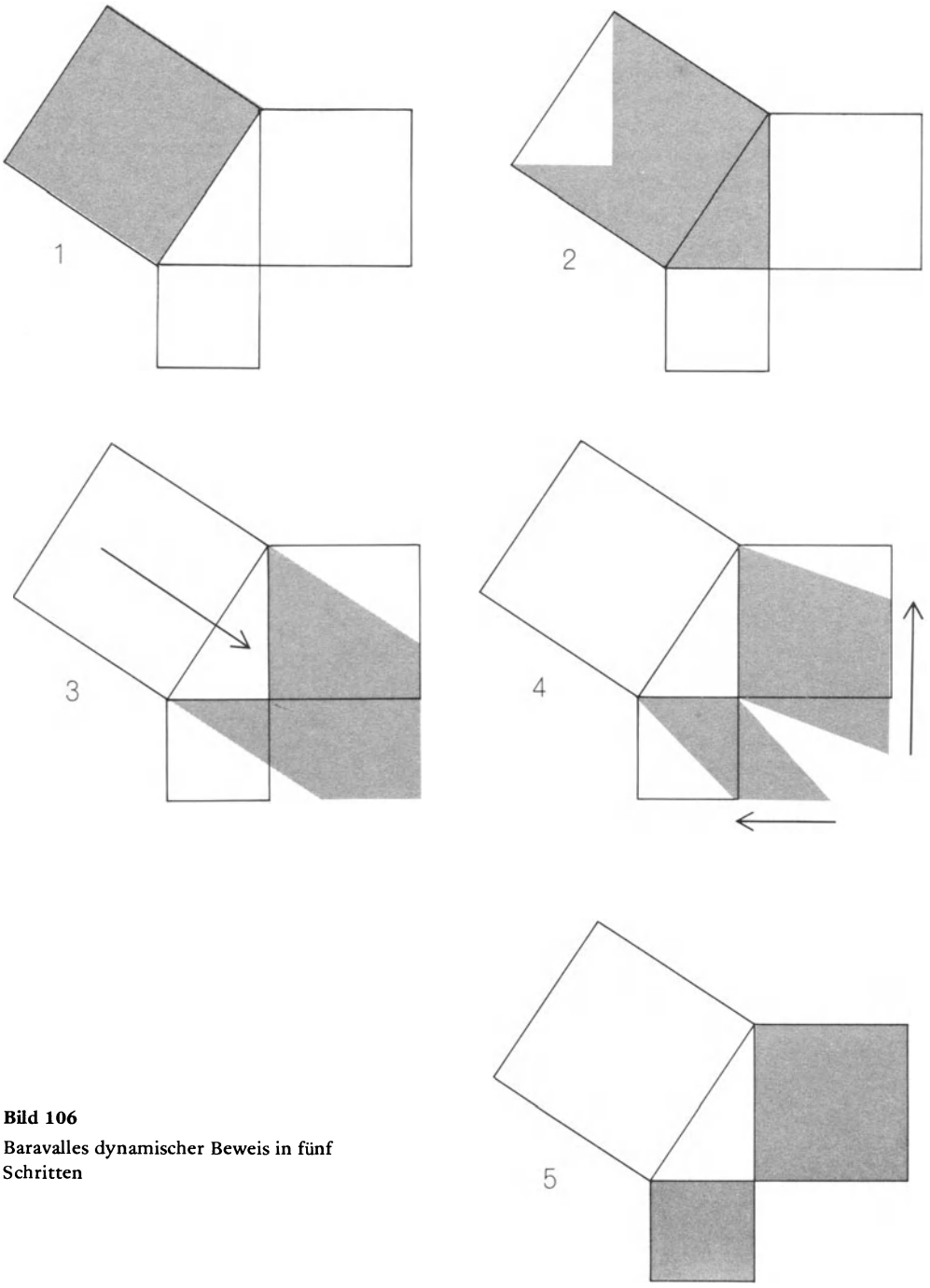


Bild 106
Baravalles dynamischer Beweis in fünf Schritten

Geschichtsforscher der Mathematik, auf Grund der Tatsache, daß die ägyptischen Tempelbauer Seile bei der Fundamentlegung verwendeten, darauf hinwies, die exakten rechten Winkel könnten vielleicht durch Verwendung eines markierten Seils erzielt worden sein, das um Pfähle zu einem 3, 4, 5-Dreieck gespannt worden war. Vielleicht stimmt dies, aber kein einziges Schriftstück stützt diese Vermutung.

Ein wunderbarer dynamischer Beweis des Theorems von dem New Yorker Mathematiker Hermann Baravalle wurde 1945 veröffentlicht. Die fünf Beweisschritte zeigt Bild 106. Nur der vierte Schritt erfordert einen Kommentar: Wird ein Parallelogramm durch eine Schubbewegung so verändert, daß Basis und Höhe gleich bleiben, so bleibt seine Fläche konstant.

Ich kenne keine weiteren intuitiv befriedigenden Beweise des Theorems, aber mit Hilfe von etwas elementarer Algebra sind noch einfachere Beweise möglich. Der sicherlich einfachste ergibt sich, wenn man das Dreieck mit horizontaler Hypotenuse wie im Bild 107 zeichnet und dann eine vertikale Gerade durch die obere Ecke zieht. Das kleine gerasterte Dreieck ist dem großen Dreieck ABC ähnlich, da beide den Winkel bei A gemeinsam haben. Die Seiten ähnlicher Dreiecke stehen im gleichen Verhältnis zueinander, d. h. $b:x=c:b$ bzw. $b^2=cx$. Das kleine nicht gerasterte Dreieck ist ebenfalls ähnlich zum Dreieck ABC (sie haben den Winkel bei B gemeinsam), daher folgt $a:(c-x)=c:a$ bzw. $a^2=c^2-cx$. Addiert man die beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{rl} b^2 &= xc \\ a^2 &= c^2-cx \\ \hline a^2+b^2 &= c^2 \end{array},$$

so erhält man die Aussage des Theorems.

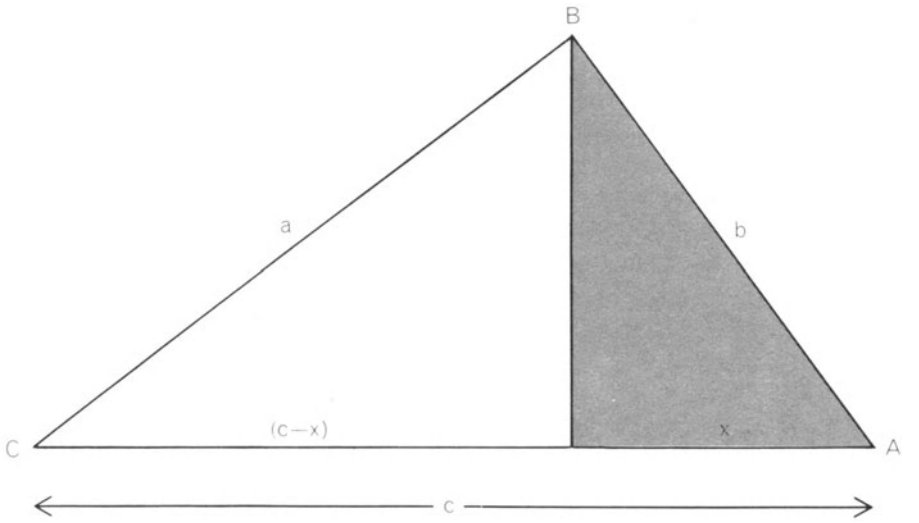


Bild 107 Der einfachste algebraische Beweis des Theorems

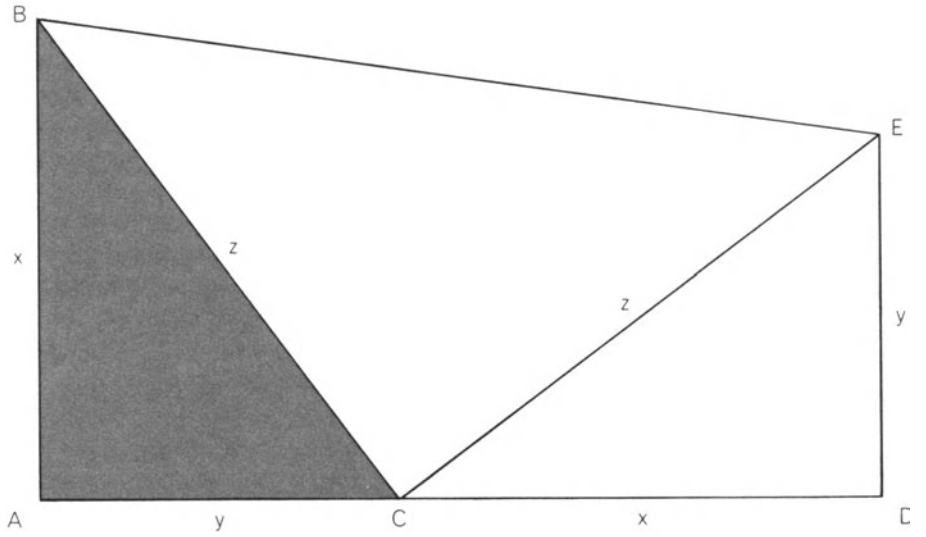


Bild 108 Präsident Garfields Beweis

Hunderte von geistreichen Beweisen sind veröffentlicht worden. Die zweite Auflage (1940) von "The Pythagorean Proposition" von Elisha S. Loomis enthält 367 verschiedene, übersichtlich nach Typen klassifizierte Beweise. Von besonderem Interesse – es ist der einzige Beitrag, den je ein Präsident der Vereinigten Staaten zur Mathematik leistete – ist ein algebraischer Beweis, der auf der im Bild 108 angegebenen Konstruktion basiert. Der Beweis erschien zuerst in einer Bostoner Zeitschrift, "The New England Journal of Education", (1. April 1876), mit einem Vermerk des Herausgebers, daß dieser Beweis ihm von James A. Garfield, damals republikanischer Kongreßabgeordneter aus Ohio, gegeben worden war. Garfield war bei „einem mathematischen Zeitvertreib" mit anderen Kongreßabgeordneten darauf gestoßen – sagte dieser Vermerk – und „wir glauben, dies ist etwas, worüber sich die Mitglieder beider Häuser ohne Rücksicht auf Parteizugehörigkeit einig sein können." Das zugrundeliegende Dreieck wird gerastert dargestellt. An seine Hypotenuse wird das gleichschenkelige, rechtwinkelige Dreieck CBE angeschlossen. Die Linie C wird verlängert und dann vom Punkt E aus das Lot gefällt, so daß sich der Schnittpunkt D ergibt. Das gerasterte Dreieck und das Dreieck DCE sind kongruent, daher folgt $AB = DC$ und $AC = DE$. Ich überlasse den Rest des Beweises dem Leser als Aufgabe.

Das Theorem kann auf mannigfache Art in interessanter Weise verallgemeinert werden. Beispielsweise kann an jede der drei Dreiecksseiten eine beliebige Figur angeschlossen werden – Halbkreise, Sechsecke, Dreiecke usw. Solange die drei Figuren ähnlich sind – mit den entsprechenden Seiten am Dreieck – muß die Fläche der Figur an der Hypotenuse gleich der Summe der Flächen der beiden anderen Figuren sein. Pappus von Alexandria, ein griechischer Geometer, der um 500 n. Chr. lebte, bewies eine wesentlich

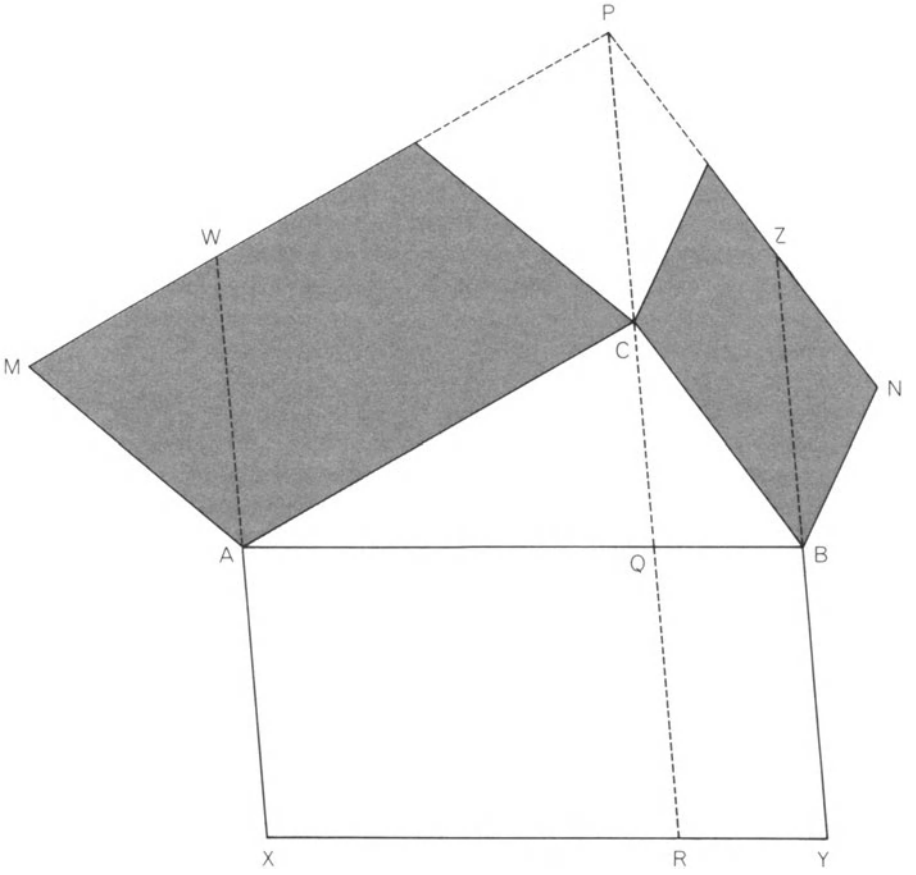


Bild 109 Pappus Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes

bemerkenswertere Verallgemeinerung. Man beginnt mit einem völlig beliebigen Dreieck (*ABC* im Bild 109). An den beiden Schenkeln werden zwei Parallelogramme von beliebiger Größe und Form angeschlossen (gerastert gezeichnet). Die Seiten dieser Parallelogramme werden wie gezeigt verlängert, bis sie sich im Punkt *P* schneiden. Anschließend zeichnet man eine Gerade durch *P* und *C*, die man so weit nach unten verlängert, bis *QR* gleich *PC* ist. Wird nun ein Parallelogramm an die Hypotenuse des Dreiecks so angeschlossen, daß seine Seiten parallel zu *PR* laufen und die Länge *QR* haben, so wird seine Fläche gleich der Summe der Flächen der anderen beiden Parallelogramme sein.

Ein Beweis ist lächerlich einfach. Das gerasterte Parallelogramm links im Bild hat denselben Flächeninhalt wie das Parallelogramm *WPCA* (aus demselben Grund, wie im Zusammenhang mit Baravalles Beweis angegeben wurde) und auch (aus demselben Grund) dieselbe Fläche wie das Parallelogramm *AQRX*. Auf der rechten Seite ergibt

dasselbe Argument, daß das gerasterte Parallelogramm flächengleich mit dem Parallelogramm $QBYR$ ist. Da das große Parallelogramm an der Hypotenuse sich aus $AQRX$ und $QBYR$ zusammensetzt, ist seine Fläche gleich der Summe der Flächen der beiden gerasterten Parallelogramme. Es ist leicht zu erkennen, daß der Pythagoreische Lehrsatz ein Spezialfall des Theorems von Pappus ist. Man erhält ihn daraus, wenn der Winkel bei C 90 Grad ist und die zwei gerasterten Parallelogramme Quadrate sind. In diesem Spezialfall entspricht dann der soeben angeführte Beweis im wesentlichen dem Beweis von Baravalle.

Das einfachste Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen ist das 3, 4, 5-Dreieck. Natürlich kann man eine unendliche Anzahl weiterer „Pythagoreischer Tripel" – wie diese drei Zahlen genannt werden – erhalten, indem man einfach jede der drei Zahlen mit derselben ganzen Zahl multipliziert. Multipliziert man mit 2, so erhält man das Pythagoreische Tripel 6, 8, 10. Dieses ist nicht übermäßig interessant, denn ein Dreieck mit diesen Seiten ist einfach eine vergrößerte Version des 3, 4, 5-Dreiecks. Viel interessanter sind Pythagoreische Tripel, die keinen gemeinsamen Teiler haben, d.h., die drei ganzen Zahlen sind teilerfremd. Solche Tripel nennen wir „Teilerfremde Pythagoreische Tripel", in abgekürzter Schreibweise: TP-Tripel. Offensichtlich haben zwei TP-Dreiecke niemals die gleiche Form.

Jedes Pythagoreische Tripel, teilerfremd oder nicht, ist eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Es gibt unendlich viele *teilerfremde* Lösungstripel. (Ist der Exponent der drei Ausdrücke in dieser Gleichung eine beliebige ganze Zahl größer als 2, so vermutet man, daß *keine* ganzzahlige Lösung existiert. Dies ist die „Letzte Fermatsche Vermutung", die noch nicht bewiesen ist.) Die Formel, die teilerfremde Lösungen erzeugt, geht auf die Alten Griechen und vermutlich sogar auf die Alten Babylonier zurück:

$$x = a^2 - b^2$$
$$y = 2ab$$
$$z = a^2 + b^2.$$

Die Buchstaben x und y bezeichnen die Katheten, z die Hypotenuse des Dreiecks. a und b stellen ganze Zahlen, „Erzeugende" genannt, dar; sie können beliebige positive ganze Zahlen sein mit der Einschränkung, daß sie teilerfremd sind (eine gerade, die andere ungerade) und daß a größer als b ist. Ist z.B. $b = 1$ und $a = 2$ (die kleinstmöglichen Erzeugenden), so ergibt sich das 3, 4, 5-Dreieck. Die Erzeugenden $a = 3$ und $b = 2$ ergeben das nächste TP-Tripel: 5, 12, 13. Auf diese Weise erzeugen die Formeln alle TP-Tripel. Es gibt 16 TP-Dreiecke mit Seitenlängen kleiner als 100 und es gibt genau 100 derartige Pythagoreische Dreiecke (einschließlich der TP-Dreiecke), falls man Spiegelbilder als verschieden zählt.

Das Studium der Pythagoreischen Tripel ist seit langem ein vitaler Zweig der Zahlentheorie, mit einem ehrfurchtgebietenden Literaturausmaß. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß x und z ungerade und y „doppelt gerade" (durch vier teilbar) sein müssen. Entweder x oder y sind sicherlich ein Vielfaches von 3, und eine der drei Zahlen muß immer ein Vielfaches von 5 sein. Da die Faktoren 3, 4, 5 irgendwo im Tripel vorkommen,

muß das Produkt der drei Zahlen immer ein Vielfaches von 60 sein. Die Fläche eines TP-Dreiecks muß ein Vielfaches von 6 sein und kann keine Quadratzahl sein.

Sich von solch einfachen Eigenschaften entfernend haben sich die Erforscher der Pythagoreischen Tripel selbst eine endlose Anzahl bizarrer Probleme gestellt: Wie viele TP-Dreiecke haben eine gewisse ganze Zahl als Länge der Kathete? Als Hypotenuse? Man finde ein TP-Dreieck mit einem Umfang, der eine Quadratzahl ist; oder ein TP-Dreieck mit einem Flächeninhalt, der zahlenmäßig gleich der Hypotenusenlänge ist; oder die Kathetenlängen sollen sich nur um 1 unterscheiden; oder mit einem Flächeninhalt, der jede der neun Ziffern genau einmal enthält usw. Es ist schwer, ein Problem dieser Art zu finden, das nicht bereits auf das eifrigste behandelt worden ist.

Es ist zum Beispiel einfach zu beweisen, daß es nur zwei Pythagoreische Dreiecke – 6, 8, 10 und 5, 12, 13 – gibt, deren Umfang zahlenmäßig gleich ihrer Fläche ist. Gibt es ein TP-Dreieck, dessen Hypotenuse eine Quadratzahl ist und dies auch für die Differenz der Kathetenlängen gilt? Ja: Das kleinste derartige Dreieck ist 119, 120, 169. Gibt es ein TP-Dreieck, dessen Hypotenuse eine Quadratzahl ist und dies auch für die *Summe* der Kathetenlängen gilt? Ja; aber nun ist das kleinste derartige Dreieck durch 4 565 486 027 761, 1 061 652 293 520, 4 687 298 610 289 bestimmt. (Dieses Problem wurde von Fermat im Jahre 1643 aufgestellt und gelöst.) Das TP-Dreieck mit Seitenlängen 693, 1 924, 2 045 hat einen Flächeninhalt von 666 666.

Kein gleichschenkeliges Dreieck kann ein Pythagoreisches Dreieck sein (seine Hypotenuse ist inkommensurabel mit der Kathete), aber man kann beliebig nahe an ein gleichschenkeliges Dreieck herankommen. Albert H. Beiler gibt in "Recreations in the Theory of Numbers" ein TP-Dreieck an, das so nahe einem gleichschenkeligen Dreieck ist, daß bei Verlängerung der Seite an einem der spitzen Winkel um 100 Milliarden Lichtjahre die Abweichung vom 45-Grad-Winkel noch immer (wie Beiler betont) ein unvorstellbar kleiner Bruchteil vom Radius eines Protons sein würde! Eine Kathete dieses Mammut-Pythagoreischen Dreiecks ist 21 669 693 148 613 788 330 547 979 729 286 307 164 015 202 768 699 465 346 081 691 992 338 845 992 696. Die andere Kathete ist durch diese Zahl plus 1 gegeben.

Einige der schwierigsten Probleme auf diesem Gebiet betreffen TP-Dreiecke, die denselben Flächeninhalt aufweisen. Fermat zeigte, wie man beliebig viele nicht-teilerfremde Pythagoreische Dreiecke mit derselben Fläche finden kann. Vor etwa 20 Jahren arbeitete William P. Whitlock Jr. eine Reihe von raffinierten Formeln aus, die es ermöglichen, jeweils Paare von *teilerfremden* Pythagoreischen Dreiecken mit derselben Fläche zu finden. Bis jetzt wurde aber erst ein Beispiel für *drei* flächengleiche TP-Dreiecke gefunden: 1 380, 19 019, 19 069; 3 059, 8 580, 9 109; 4 485, 5 852, 7 373. Ihre gemeinsame Fläche ist 13 123 110. (Entdeckt wurde dieses Tripel 1945 von Charles L. Shedd aus Arlington, Massachusetts.) Gibt es ein weiteres Tripel? Dies weiß niemand.

Sie wollen diese schwierige Frage sicherlich den Experten überlassen. Hier folgen nun vier einfache – allerdings in gewisser Weise knifflige – Probleme bezüglich Pythagoreischer Dreiecke; alle werden im Lösungsteil beantwortet.

1. Welches Dreieck hat die größere Fläche, das mit den Seiten 5, 5, 6 oder jenes mit den Seiten 5, 5, 8?
2. Ein 30, 40, 50 Pythagoreisches Dreieck hat den Umfang 120. Man finde zwei andere Pythagoreische Dreiecke mit demselben Umfang.

3. Wie groß ist die kleinste Anzahl von Streichhölzern, die man benötigt, um auf einer Ebene gleichzeitig zwei verschiedene (nicht kongruente) Pythagoreische Dreiecke zu bilden? Die Streichhölzer repräsentieren Einheitslängen und dürfen dabei in keiner Weise abgebrochen oder zerteilt werden.
4. Für jedes Pythagoreische Dreieck sind die Durchmesser des eingeschriebenen bzw. des umschriebenen Kreises ganzzahlig. Den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises erhält man, indem man die Kathetenlängen addiert und dann die Hypotenusenlänge subtrahiert (z. B. ist der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises für das 3, 4, 5-Dreieck gleich 2). Man ermittle die Formel für den Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Lösungen

Wie sieht Präsident Garfields Beweis für den Pythagoreischen Lehrsatz aus? Die Fläche der gesamten Figur im Bild 108 – d. h. des Trapezes $ABED$ – ist das Produkt der Basis $x + y$ mal der Hälfte der Summe der Seiten x und y. Dies kann in der Form

$$\frac{(x + y)(x + y)}{2}$$

geschrieben werden. Die Fläche des Trapez ist auch gleich der Summe der Flächen der drei Dreiecke. Das größte Dreieck hat die Fläche $z^2/2$; jedes der beiden anderen (kongruenten) Dreiecke hat die Fläche $xy/2$. Man drückt die Trapezfläche somit auch durch

$$\frac{z^2}{2} + \frac{2xy}{2}$$

aus. Setzt man die beiden Ausdrücke gleich, so erhält man die Gleichung

$$\frac{(x + y)(x + y)}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{2xy}{2},$$

die schließlich $x^2 + y^2 = z^2$ ergibt.

I. Carl Romer Jr. bemerkte, daß Garfields Beweis im wesentlichen mit dem Beweis im Bild 105 übereinstimmt. Garfields Figur ist genau eine Hälfte der Figur links im Bild 105.

Die vier Probleme, die Pythagoreische Dreiecke betreffen, haben folgende Lösungen:

1. Die Dreiecke 5, 5, 6 und 5, 5, 8 haben dieselbe Fläche, da jedes durch je zwei 3, 4, 5-Dreiecke halbiert werden kann.
2. Die kleinsten Pythagoreischen Dreiecke mit demselben Umfang sind 30, 40, 50; 24, 45, 51 und 20, 48, 52. Jedes hat den Umfang 120. Die drei kleinsten TP-Dreiecke mit demselben Umfang sind 3 255, 5 032, 5 993; 168, 7 055, 7 057 und 119, 7 080, 7 081.

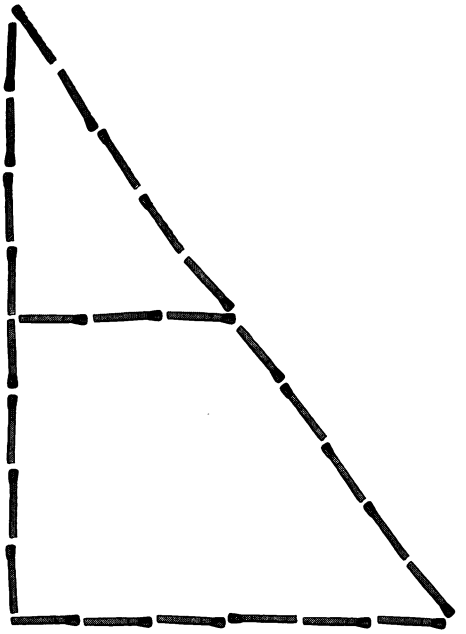


Bild 110 Die Lösung des Zündholzproblems

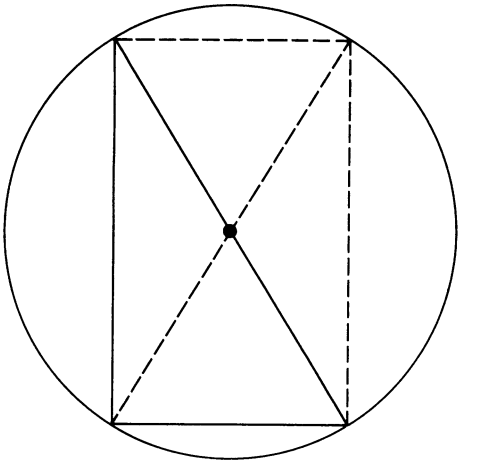


Bild 111
Der Umkreis eines rechtwinkeligen Dreiecks

3. Zwei nichtkongruente Pythagoreische Dreiecke – 3, 4, 5 und 6, 8, 10 – können gleichzeitig mit nur 27 Streichhölzern geformt werden (Bild 110).
4. Der Durchmesser des umschriebenen Kreises ist für jedes rechtwinkelige Dreieck gleich der Länge der Hypotenuse, wie man leicht aus Bild 111 entnimmt.

16 Grenzwerte von unendlichen Reihen

Der Ball lachte. Wenn man noch nie einen Gummiball lachen gehört hat, wird man dies nicht verstehen. Es ist eine Art eines immer schneller und leiser werdenden Glucksen, das der Ball von sich gibt, wenn er zur Ruhe kommt, nachdem man es müde ist, ihn springen zu lassen.

E. Nesbit, "Nine Unlikely Tales"

Für Mathematikstudenten, die gerade den Sprung vom „einfachen Rechnen" zur Differential- und Integralrechnung machen, ist nichts von größerem Wert als ein sicheres und intuitives Erfassen des Grenzwertbegriffs. Ableitung und bestimmtes Integral, beides grundlegende Werkzeuge der Analysis, sind beide Grenzwerte unendlicher Reihen. Jede irrationale Zahl, wie π, e und $\sqrt{2}$, stellt den Grenzwert einer unendlichen Reihe dar. Vielleicht kann ein unterhaltsamer Zugang zu diesem Konzept mithelfen, einige der Schwierigkeiten zu überwinden, die in der frühen Geschichte der Analysis so große metaphysische Verwirrung stifteten und auch heute noch oft den Studenten zu schaffen machen.

Zeno von Elea, ein griechischer Philosoph aus dem 5. Jh. v. Chr., war der erste, der mit einer Anzahl von berühmten Paradoxa demonstrierte, wie leicht man in „logische Fallen" fällt, wenn man sich mit unendlichen Reihen beschäftigt. Wie – fragte Zeno – kann ein Läufer je von A nach B gelangen? Zuerst muß er die halbe Strecke zurücklegen. Dann muß er die Hälfte der verbleibenden Strecke laufen, was ihn zum Punkt „$\frac{3}{4}$" bringt. Aber bevor er das letzte Viertel zurücklegt, muß er wiederum die Hälfte davon – bis zum Punkt „$\frac{7}{8}$" – laufen. Mit anderen Worten: Er legt eine Entfernung zurück, die gleich der Summe der folgenden Reihe ist:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Die Punkte am Ende bedeuten, daß die Reihe in gleicher Weise fortgesetzt wird. Wie kann ein Läufer eine unendliche Anzahl von Strecken in einer endlichen Zeit zurücklegen? Wenn man die Ausdrücke dieser Reihe addiert, erreicht man nie das Ziel 1; es fehlt einem immer wieder eine Strecke, deren Länge gleich dem letzten Bruch ist, den man gerade addiert hat.

Man kann nun auf einfache Weise ein Experiment entwerfen, so daß Zenos Behauptung theoretisch stimmt. Man stelle eine Schachdame so auf, daß der Mittelpunkt ihrer kreisförmigen Grundfläche mit dem Punkt A zusammenfällt. Dann soll sie in folgender Weise entlang einer Geraden vom Punkt A zum Punkt B geschoben werden: Zuerst

verschiebe man sie um die Strecke $\frac{1}{2}$, dann lasse man eine Sekunde verstreichen. Darauf schiebe man sie um die Strecke $\frac{1}{4}$ weiter und pausiere wieder eine Sekunde. Man fahre auf diese Weise fort, indem man zwischen zwei Verschiebungen jeweils eine Sekunde pausiert. Wann wird die Dame den Punkt B erreichen? Die Antwort ist: Niemals. Wenn wir jedoch annehmen, daß man die Dame mit konstanter Geschwindigkeit verschiebt, so daß sie die halbe Strecke in einer halben Sekunde, ein Viertel der Strecke in einer viertel Sekunde zurücklegt usw., so werden sowohl die zurückgelegten Entfernungen als auch die dafür benötigten Zeiten durch dieselbe Reihe beschrieben. Beide „konvergieren" simultan gegen die Zahl 1. Die Dame erreicht daher in einer Sekunde den Punkt B.

Was meint ein Mathematiker damit, wenn er sagt: Die „Summe" der genannten Reihe ist 1? Es ist klar, daß es nicht eine Summe in dem Sinn ist, wie man von der Summe einer endlichen Reihe spricht. Es gibt keine Möglichkeit, eine unendliche Reihe im üblichen Sinn zu summieren, denn die Anzahl der Ausdrücke, die zu summieren sind, nimmt kein Ende. Spricht ein Mathematiker von der Summe – genauer vom Grenzwert – einer unendlichen Reihe, meint er damit eine Zahl, der sich der Wert der Reihe nähert, wenn die Anzahl der Summanden unbegrenzt anwächst. Unter dem Wort „nähert" versteht er dabei folgendes: Die Differenz zwischen dem Wert der Reihe und ihrem Grenzwert kann *beliebig klein gemacht werden*. Hier kommen wir auf den Kern der Sache. Der Wert einer unendlichen Reihe erreicht manchmal ihren Grenzwert und geht manchmal über diesen Grenzwert hinaus. Ein einfaches Beispiel zum letzteren Fall ergibt obige Reihe mit alternierenden Vorzeichen:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\dots$$

Die Teilsummen dieser Reihe sind abwechselnd größer oder kleiner als ihr Grenzwert von 0,3333 ..... (Dies ist, nebenbei bemerkt, eine Möglichkeit, um $\frac{1}{3}$ als Grenzwert einer unendlichen Reihe von Dezimalbrüchen zu schreiben.) Die wichtigste Tatsache ist nun, daß man für jede unendliche, konvergente Reihe immer eine Teilsumme finden kann, die sich vom Grenzwert nur um einen Betrag unterscheidet, der kleiner als jede beliebig (klein) vorgebbare Zahl ist.

Den Grenzwert einer konvergenten Reihe zu finden ist oft äußerst schwierig. Nehmen die einzelnen Reihenglieder jedoch „geometrisch" ab, wie dies bei der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

der Fall ist, so gibt es einen einfachen Kniff, den jeder Leser kennen sollte: Es bezeichne x die gesamte Reihe, d. h.

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Da jedes Reihenglied doppelt so groß wie das jeweils folgende ist, multipliziert man die Reihe mit 2:

$$2x = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right),$$

$$2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Die neue Reihe ist – abgesehen vom ersten Glied, das 1 ist – gleich der ursprünglichen Reihe,

$$2x = 1 + x,$$

woraus $x = 1$ folgt.

Wir wollen uns ansehen, wie dies bei einem weiteren Paradoxon Zenos anzuwenden ist: dem Wettrennen zwischen Achilles und der Schildkröte. Achilles möge zehnmal so schnell wie die Schildkröte laufen, und das Tier soll einen Vorsprung von 100 Metern haben. Nachdem Achilles 100 Meter gelaufen ist, hat sich die Schildkröte um 10 Meter weiterbewegt. Nachdem Achilles 10 Meter gelaufen ist, hat sich die Schildkröte um 1 Meter fortbewegt. Wenn Achilles für jeden Abschnitt dieser Reihe dieselbe Zeit benötigt, wird er die Schildkröte nie einholen; wenn sich aber beide mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, wird er sie einholen. Wie weit hat Achilles zu laufen, bis er die Schildkröte einholt? Die Antwort ist durch den Grenzwert der Reihe 100 + 10 + 1 +0,1 + 0,01 + ... gegeben. Man erkennt hier sofort, daß dies 111, 111 ... bzw. 111 $\frac{1}{9}$ Meter ist. Nimmt man an, daß Achilles siebenmal so schnell wie die Schildkröte läuft, die wiederum denselben Vorsprung von 100 Metern hat – wie weit muß dann Achilles laufen, um die Schildkröte einzuholen?

(Wir lassen hier die Frage, ob die moderne Mathematik Zeno widerlegt hat oder nicht, beiseite; es hängt natürlich alles davon ab, was man in diesem Zusammenhang unter „widerlegen" versteht. Der interessierte Leser kann keine bessere Einführung in die schwierige Literatur über dieses Gebiet finden als Bertrand Russels kurze Erörterung in Kapitel 6 von "Our Knowledge of the External World" und seine auf höherem Niveau stehende Analysis auf den Seiten 336-354 in "Principles of Mathematics" (zweite Auflage; New York: W. W. Norton and Company, 1938). Zenos Paradoxa werfen Fragen über Raum, Zeit und Bewegung auf, die zu tiefgreifend sind, als daß man sie so leichtfertig beantworten sollte, wie einst der Zyniker Diogenes: Er stand auf und ging von *A* nach *B*.)

Probleme über hüpfende Bälle, die in vielen Rätselbüchern zu finden sind, führen auch sofort auf den gerade erklärten Trick. Man nehme an: Ein idealer Ball wird aus einer Höhe von einem Meter fallen gelassen. Er soll immer wieder auf $\frac{1}{3}$ seiner ursprünglichen Höhe hochspringen. Wenn jeder Sprung eine Sekunde dauert, wird der Ball in alle Ewigkeit weiterhüpfen; da aber die Zeit für jeden Sprung ebenfalls entsprechend einer konvergenten Reihe abnimmt, wird der Ball schließlich aufhören zu hüpfen, obwohl er (theoretisch) eine unendliche Anzahl von Sprüngen macht. Der Leser dürfte ohne Schwierigkeiten herausfinden, welchen Gesamtweg der Ball zurücklegt, bevor er zur Ruhe kommt.

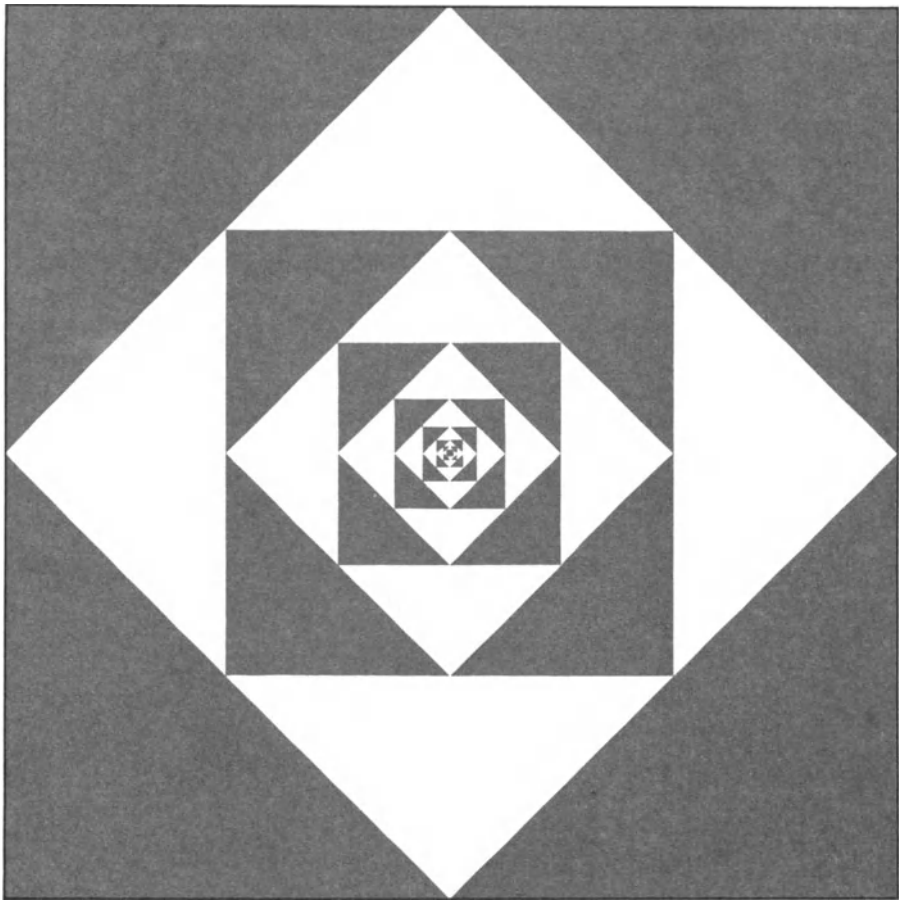


Bild 112 Eine unendliche Menge von ineinandergeschachtelten Quadraten

Es gibt eine Unzahl geometrischer Beispiele für Reihen dieser Art. Das größte Quadrat im Bild 112 habe die Seitenlänge 1 und das Ineinanderschachteln werde unbegrenzt fortgesetzt. Wie groß ist die Gesamtfläche dieser unendlichen Reihe von Quadraten? Offensichtlich ist sie 1 plus der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

von früher, d. h., die Gesamtfläche ist 2. Nur eine Kleinigkeit schwieriger ist das folgende Problem, das 1905 bei einem alljährlich in Ungarn abgehaltenen Wettbewerb vor-

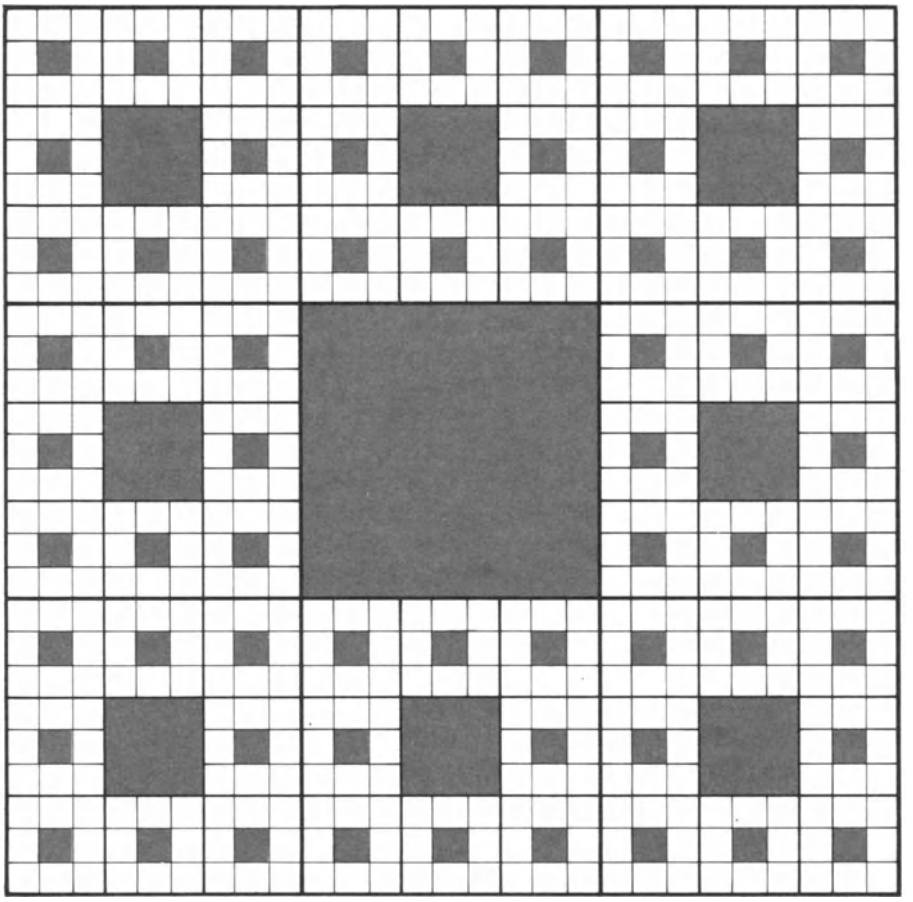


Bild 113 Wie groß ist der Grenzwert der bemalten Fläche?

gelegt wurde: Ein Einheitsquadrat wird in neun gleiche Quadrate unterteilt (Bild 113) und das innerste Quadrat wird gefärbt. Die verbleibenden acht Quadrate werden in gleicher Weise unterteilt und gefärbt. Wie groß ist die bemalte Fläche, wenn man diesen Vorgang unbegrenzt oft wiederholt?

Konvergiert eine Reihe nicht, so nennt man sie divergent. Es ist leicht zu sehen, daß $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$ nicht konvergiert. Nimmt man jedoch an, daß jedes Glied in einer Reihe mit positiven Vorzeichen *kleiner* als das vorhergehende ist – muß dann nicht eine solche Reihe konvergieren? Man mag es am Anfang vielleicht nur schwer glauben, aber die Antwort ist nein. Man betrachte die „harmonische Reihe"

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Die Reihenglieder werden kleiner und kleiner, und zwar nähern sie sich sogar dem Grenzwert Null. Trotzdem wächst die Summe über alle Grenzen! Um dies zu beweisen, braucht man nur die Glieder in Gruppen zu je zwei, vier, acht usw., beginnend mit $\frac{1}{3}$, zu ordnen. Die erste Gruppe, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, hat eine Summe, die größer ist als $\frac{1}{2}$, da $\frac{1}{3}$ größer als $\frac{1}{4}$ ist und $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ die Summe $\frac{1}{2}$ liefert. Ebenso ergibt die zweite Gruppe, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, mehr als $\frac{1}{2}$, da jeder außer dem letzten Ausdruck $\frac{1}{8}$ übersteigt und $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ die Summe $\frac{1}{2}$ hat. In derselben Weise übersteigt die dritte aus acht Gliedern bestehende Gruppe $\frac{1}{2}$; denn jedes Glied außer dem letzten ($\frac{1}{16}$) ist größer als $\frac{1}{16}$ und $8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$. So kann man zeigen, daß jede der folgenden Gruppen $\frac{1}{2}$ übersteigt; da die Anzahl solcher Gruppen unbeschränkt ist, muß die Reihe divergieren. Sie tut es jedoch aufreizend langsam. Die ersten 100 Glieder ergeben beispielsweise eine Summe, die nur etwas über 5 liegt. Um eine Summe von 100 zu erreichen, benötigt man mehr als 2^{143} Glieder, aber weniger als 2^{144}. (Ich bin Daniel Asimov für diese obere und untere Schranke zu Dank verpflichtet.) 1968 ermittelte John W. Wrench Jr. die genaue Anzahl von Gliedern, für die die Reihe eine Teilsumme hat, die 100 übersteigt. Die Anzahl der Glieder ist
15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497.

Die harmonische Reihe spielt in einem amüsanten Problem eine Rolle, das im April 1954 im "Pi Mu Epsilon Journal" und kürzlich in "Puzzle-Math", einem Buch von George Gamow und Marvin Stern, veröffentlicht wurde. Legt man zwei Ziegel aufeinander, so ergibt sich der größtmögliche Überhang, falls der Schwerpunkt des oberen Ziegels direkt über dem Ende des unteren Ziegels liegt, wie dies durch den Pfeil *A* im Bild 114 angezeigt wird. Legt man diese beiden Ziegel auf einen dritten, so ergibt sich ein maximaler Überhang, wenn ihr gemeinsamer Schwerpunkt über der Kante des dritten Ziegels liegt, wie dies durch Pfeil *B* angezeigt wird. Setzt man diesen Vorgang nach unten fort, so erhält man eine Säule, die sich wie im Bild 114 gezeigt wird krümmt. Wie groß kann der Überhang maximal werden? Kann er die volle Länge eines Ziegels betragen?

Die unglaubliche Antwort ist, daß der Überhang so groß wie gewünscht sein kann! Der oberste Ziegel ragt um eine halbe Ziegellänge vor, der zweite um $\frac{1}{4}$, der dritte um $\frac{1}{6}$ und so fort. Mit einer unbegrenzten Anzahl von Ziegeln ist der Überhang gleich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

Dies ergibt sich aus der harmonischen Reihe, indem man einfach von jedem Glied die Hälfte nimmt. Da die „Summe" der harmonischen Reihe größer als jede beliebig vorgebbare Zahl ist, ist dies auch für die Hälfte der Fall. Kurz gesagt: Die Reihe divergiert und daher kann der Überhang über alle Grenzen wachsen. Da – wie wir gesehen haben – eine solche Reihe sehr langsam divergiert, würde man sehr viele Ziegel brauchen, um auch nur einen kleinen Überhang zu erhalten. Mit 52 Spielkarten – wobei die unterste so gelegt ist, daß sie mit der Tischkante glatt abschließt – beträgt der maximale Überhang etwas mehr als $2\frac{1}{4}$ Kartenlängen (Bild 115). Der Leser möge versuchen, ob er mit einem Paket Spielkarten einen Überhang von mehr als 2 Kartenlängen erreichen kann.

Die harmonische Reihe hat viele seltsame Eigenschaften. Streicht man jedes Glied, das die Ziffer 9 enthält, so ergeben die restlichen Glieder eine konvergente Reihe. Wird

der Nenner jedes Gliedes zur selben $n$ten Potenz erhoben, und ist n dabei größer als 1, so konvergiert diese Reihe. Wird jedes zweite Vorzeichen in ein Minus umgewandelt, so konvergiert die sich ergebende Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

gegen den natürlichen Logarithmus von 2, einer Zahl, die etwas kleiner als 0,7 ist. Erreicht der Wert einer Teilsumme jemals (nach der ersten Teilsumme 1 natürlich) einen ganzzahligen Wert? Wenn man eine einfache Formel für den Wert einer Teilsumme mit n Gliedern hätte, könnte dies einfach beantwortet werden, aber es gibt keine solche Formel. Ein geistreiches Ungerade-Gerade-Argument, das zumindest auf das Jahr 1915 zurückgeht (die Einzelheiten sind auf Seite 48 im "American Mathematical Monthly" für Januar 1934 angegeben), zeigt jedoch, daß die Reihe nie eine ganzzahlige Teilsumme erreicht.

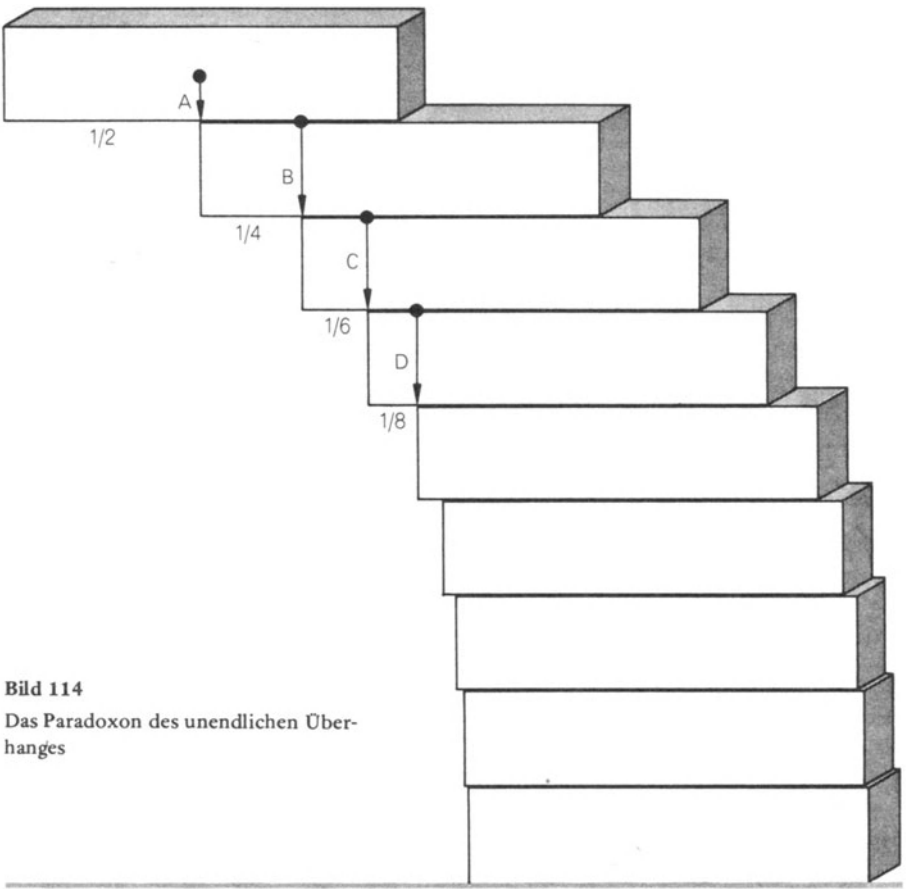


Bild 114
Das Paradoxon des unendlichen Überhanges

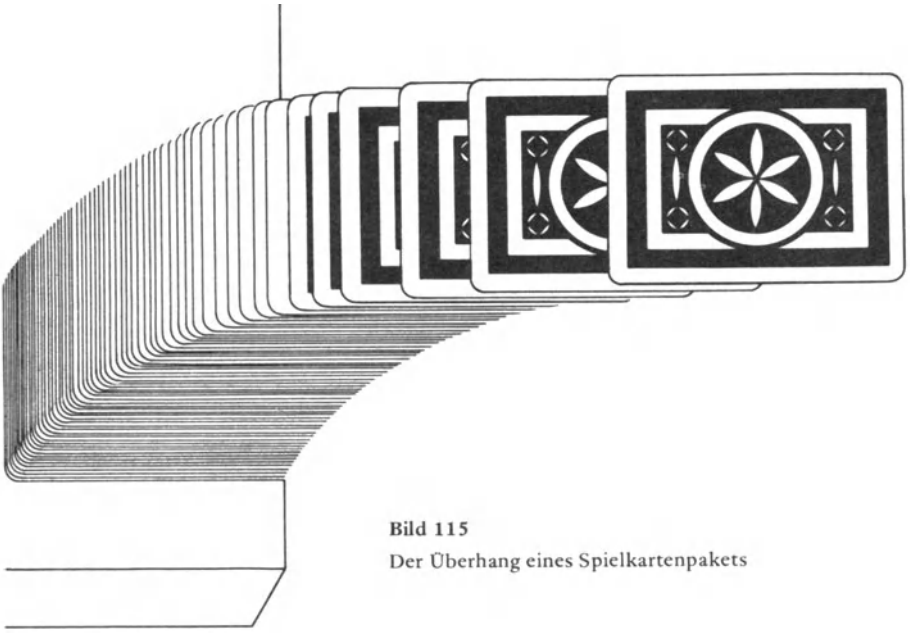


Bild 115
Der Überhang eines Spielkartenpakets

Sind alle Glieder einer unendlichen Reihe positiv, so spielt es natürlich keine Rolle, wie die Glieder gruppiert oder umgeordnet werden; der Grenzwert bleibt derselbe. Treten aber auch negative Glieder auf, so ergibt dies manchmal einen großen Unterschied. Vom 17. Jahrhundert bis Mitte des 19. Jahrhunderts – d.h., bevor die Gesetze von Grenzwerten sorgfältig formuliert wurden – erhielt man alle möglichen Paradoxa, indem man mit den Plus- und Minusgliedern in verschiedenen unendlichen Reihen jonglierte. Luigi Guido Grandi, ein Mathematiker der Universität Pisa, betrachtete die einfache oszillierende Reihe $1 - 1 + 1 - 1 - \ldots$ Gruppiert man die Ausdrücke gemäß $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots\ldots$, so ergibt sich der Grenzwert 0. Gruppiert man sie jedoch gemäß $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots$, so ist die Summe 1. Dies zeigt – sagte Grandi – wie Gott ein Universum hernehmen konnte, das aus Teilen bestand, die zusammen nichts ergaben, und daraus – durch geeignetes Umordnen – etwas erschaffen konnte.

Der richtige Grenzwert der ursprünglichen Reihe ist $\frac{1}{2}$, erklärte Grandi. Er unterstrich dies durch folgende Parabel: Ein Vater vererbt seinen zwei Söhnen einen Edelstein, mit der Auflage, daß der Stein jedes Jahr von einem zum anderen wechselt. Ist der Wert des Steines 1, dann ist sein Wert für jeden der beiden Söhne die Summe von $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ Da die beiden Brüder sich das Vermächtnis gleichmäßig teilen, muß dieser Wert $\frac{1}{2}$ sein. Viele berühmte Mathematiker beteiligten sich an der Auseinandersetzung über diese Reihe. Sowohl Gottfried Wilhelm von Leibniz als auch Leonhard Euler hielten ebenfalls $\frac{1}{2}$ für den richtigen Wert, allerdings aus etwas verschiedenen Gründen. Heute ist die Reihe als divergent erkannt, so daß ihr kein sinnvoller Grenzwert zugeschrieben werden kann.

Ein noch unangenehmeres Beispiel ist durch die Reihe $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots$ gegeben. Gruppiert man in der Form $1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + \ldots .$, so erhält man die Reihe $1 + 2 + 8 + 16 + \ldots .$, die gegen positiv unendlich divergiert. In der Anordnung $(1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + \ldots .$, erhält man die Reihe $-1 - 4 - 16 - 64 - \ldots ..$, die in negativer Richtung gegen unendlich divergiert! Der Höhepunkt dieses gräßlichen Wirrwarrs wurde erreicht, als Georg Friedrich Bernhard Riemann, der für seine nichteuklidische Geometrie bekannte deutsche Mathematiker, im Jahre 1854 ein wahrlich bemerkenswertes Theorem bewies. Kann der Grenzwert einer unendlichen Reihe durch Umgruppierungen oder Umordnen der Glieder geändert werden, so wird sie *bedingt* konvergent genannt – zur Unterscheidung von *absolut* konvergenten Reihen, die von solchen Manipulationen nicht berührt werden. Bedingt konvergente Reihen enthalten immer negative Glieder; sie divergieren immer, wenn alle ihre Vorzeichen positiv gemacht werden. Riemann zeigte nun, daß jede bedingt konvergente Reihe (z. B. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots .$, die den natürlichen Logarithmus von 2 als Grenzwert hat) immer auf geeignete Weise umgeordnet werden kann, so daß sich jeder gewünschte Grenzwert ergibt, rational oder irrational; ja man kann dadurch sogar Divergenz gegen positiv oder negativ unendlich erzeugen.

Aber sogar unendliche Reihen ohne negative Glieder können, wenn sie divergieren, ernstliche Schwierigkeiten bereiten, falls man auf sie die Regeln anzuwenden versucht, die nur für endliche oder konvergente Reihen gültig sind. x sei beispielsweise die positive unendliche „Summe" von $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ Dann muß $2x$ gleich $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots .$ sein. Diese neue Reihe ist einfach die alte Reihe minus 1. Daher folgt: $2x = x - 1$, woraus sich $x = -1$ ergibt. Es scheint also, als ob wir bewiesen hätten, daß -1 gleich positiv unendlich ist. Man könnte dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel zustimmen, der 1928 schrieb: „Die divergenten Reihen sind eine Erfindung des Teufels und es ist eine Schande, sich mit irgendeinem Beweis auf sie zu stützen."

Nachtrag

S. W. Golomb war der erste unter einigen anderen Mathematikern, der hervorhob, daß meine Aussage, einer divergenten Reihe könnte keine sinnvolle Summe zugeordnet werden, nicht ganz richtig war. „Nachdem wir unsere Studenten vor dem ersten Diplom davon überzeugen, daß divergente Reihen eine Erfindung des Teufels sind", schrieb Golomb, „lehren wir sie nach dem ersten Diplom, daß diese Reihen doch „summiert" werden können, wenn man nur genügend vorsichtig neue Summationsregeln definiert (z. B. Cesaro-Summation, Abel-Summation usw.)." Weiterhin schrieb Golomb, daß G. H. Hardys "Divergent Series" (New York: Oxford Press, 1949) ein bemerkenswertes Buch ist, in dem derartige Techniken erklärt werden. Beispielsweise hat die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots .$ sowohl die Cesaro-Summe als auch die Abel-Summe $\frac{1}{2}$, wie schon Leibniz und Euler behaupteten. Der Leser wird bezüglich eines faszinierenden Überblicks über dieses Gebiet auf Hardys posthumes Buch verwiesen.

Lösungen

Falls Achilles siebenmal so schnell wie die Schildkröte läuft, die einen Vorsprung von 100 Metern hat, so ist die gesamte Strecke, die Achilles zurücklegt, bevor er die Schildkröte überholt, gleich dem Grenzwert der Reihe

$$100 + \frac{100}{7} + \frac{100}{7 \cdot 7} + \frac{100}{7 \cdot 7 \cdot 7} + \ldots.$$

Jedes Glied ist siebenmal so groß wie das nächste. Durch Anwenden des früher erklärten Tricks wird x gleich der gesamten Reihe gesetzt; anschließend multipliziert man dann jede Seite mit 7:

$$7x = 700 + 100 + \frac{100}{7} + \frac{100}{7 \cdot 7} + \ldots..$$

Diese Reihe ist – abgesehen vom ersten Glied 700 – gleich der ursprünglichen Reihe, d.h. $7x = 700 + x$ bzw. $6x = 700$ und somit $x = 116\frac{2}{3}$, die Strecke in Metern, die Achilles zurücklegt.

Der hüpfende Ball kommt zur Ruhe, nachdem er eine Strecke zurückgelegt hat, die gleich ist dem ersten Meter, den er fällt plus der Summe von $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$. Derselbe Trick wird wieder angewendet (man multipliziert mit 3) und erhält für die Reihe den Grenzwert 1. Daher ist die Gesamtstrecke, die der Ball zurücklegt, bis er nach einer unendlichen Anzahl von Sprüngen zur Ruhe kommt, gleich 1 + 1, d.h. 2 Meter.

Im ungarischen Problem der gefärbten Quadrate ist nach dem Grenzwert der folgenden Reihe gefragt:

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \frac{8^3}{9^4} + \ldots..$$

Dies ist ebenfalls eine geometrische Reihe: Jedes Glied ist $\frac{9}{8}$ vom nächsten Glied. Wie oben können wir denselben Trick benützen, oder –was auf dasselbe herauskommt – die folgende Formel für die Summe einer geometrischen Reihe verwenden:

$$\frac{rx}{r-1},$$

wobei r das Verhältnis aufeinanderfolgender Glieder ist (hier $\frac{9}{8}$) und x das größte Glied der Reihe ist (hier $\frac{1}{9}$). Der Grenzwert ist 1. Wenn also die Anzahl der Färbungen unbeschränkt anwächst, geht die gefärbte Fläche des Einheitsquadrats gegen 1; mit anderen Worten: Der Grenzwert ist ein volles Quadrat. In der Praxis könnte dies natürlich nur erreicht werden, wenn man einen Vorgang des Färbens erdenken könnte, bei dem die Zeit, die für einen Schritt erforderlich ist, nach einer konvergenten Reihe abnehmen würde.

Dieses Problem wurde aus dem von Elvira Rapaport übersetzten, in Random House New Mathematical Library (New York: Random House, 1963) erschienenen Buch "Hungarian Problem Book I" entnommen.

17 Polyiamonds

1965 gaben Charles Scribner's Sons "Polyominoes" heraus, ein für Freunde mathematischer Puzzles sehr interessantes Buch. Der Autor ist Solomon W. Golomb, der damals mit dem California Institute of Technology's Jet Propulsion Laboratory eng verbunden und Professor der Ingenieurwissenschaften und Mathematik an der Universität von Southern California war. 1953 prägte Golomb, damals Student in Havard, den Ausdruck „Polyomino" für jede flache Figur, die durch Aneinanderfügen von Einheitsquadraten entlang ihrer Seiten entsteht. Da ein „Domino" aus zwei aneinandergefügten Quadraten besteht, schlug Golomb vor, eine Figur aus drei Quadraten „Tromino", aus vier Quadraten „Tetromino" usw. zu nennen.

Es zeigte sich, daß unter Puzzlefans die 12 Pentominos (dies sind die 12 verschiedenen, aus jeweils fünf Einheitsquadraten erzeugten Figuren) am beliebtesten waren. Die durch die 12 kleinen Formen aufgeworfenen kombinatorischen Probleme waren so fesselnd, daß die Beschäftigung damit zu einer Art nationalem Zeitvertreib wurde. Garnituren von Plastikpentominos wurden sowohl in Amerika als auch in Großbritannien verkauft und Golomb wurde mit Vorschlägen für neue Probleme und mit Bitten um weitere Informationen überschwemmt. Er stellte dann, zum Entzücken aller Pentominofans, in einem reichhaltig illustrierten Band alles zusammen, was er an Interessantem über Pentominos und ihre aus Quadraten zusammengesetzten „Verwandten" erfahren hatte.

In diesem Kapitel betrachten wir einen „dreieckigen Verwandten". Er wird in Golombs Buch kurz erwähnt und einige Hinweise sind in einigen Zeitschriften verstreut zu finden; aber fast alles, was über dieses neue Unterhaltungsspiel bekannt ist, ist seit 1965 entdeckt worden. Es ist dies ein Gebiet, auf dem noch viele grundlegende Probleme zu lösen sind und auf dem noch ein reichhaltiges Angebot von Mustern und Theoremen zu entdecken ist.

Golomb hat bereits im Jahre 1954 in *Checkerboards and Polyominoes* in "The American Mathematical Monthly", Dezemeber 1954, darauf hingewiesen, daß ein ähnliches Unterhaltungsspiel wie die Polyominos auf aneinanderzufügende gleichseitige Einheitsdreiecke aufbauen könnte. Der Glasgower Mathematiker T. H. O'Beirne schlug 1961 im "New Scientist" vor, solche Formen „Polyiamonds" zu nennen. Sein etymologisches Stichwort von Golomb übernehmend begründete O'Beirne dies folgendermaßen Ein Diamant (englisch: "diamond") besteht aus zwei aneinandergefügten Dreiecken, daher sollte eine Figur aus drei Dreiecken „Triamond", aus vier Dreiecken „Tetriamond" usw. „Pentiamond", „Hexiamond", Heptiamond" und höhere „n-iamonds" genannt werden. Offensichtlich gibt es nur eine Form eines Diamonds und eines Triamonds, weiterhin kann sich der Leser selbst schnell davon überzeugen, daß es drei verschiedene Tetriamonds und vier Pentiamonds gibt. (Wie bei Polyominos werden Spiegelbilder von nichtsymmetrischen Formen üblicherweise nicht verschieden gezählt.) In erfreulicher Übereinstimmung zu den Pentominos gibt es bei den Hexiamonds genau 12 Formen.

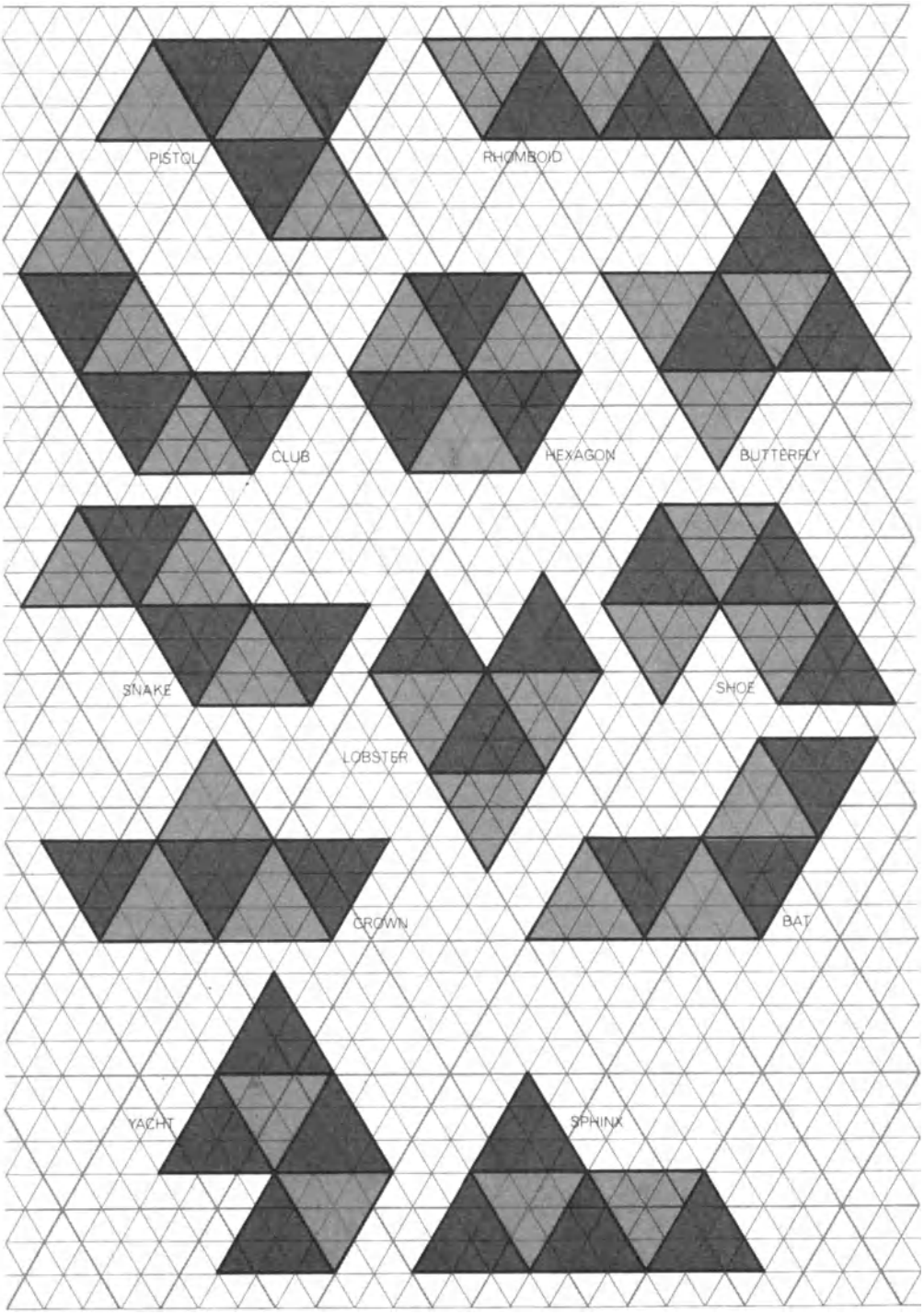


Bild 116 Die 12 Hexiamonds

Außerdem gibt es 24 Heptiamonds, 66 Octiamonds und 160 Figuren neunter Ordnung (eine mit einem Loch). Darüber hinaus wurden noch keine genauen Zählungen durchgeführt.

Die 12 Hexiamonds sind im Bild 116 dargestellt und mit passenden Namen versehen, die fast alle von O'Beirne vorgeschlagen wurden. Dem Leser wird empfohlen, diese 12 Figuren auf Karton zu kopieren und sorgfältig auszuschneiden. Die unterschiedliche Färbung der Formen braucht dabei nicht berücksichtigt zu werden. Am besten verwendet man Karton, der auf beiden Seiten gleich aussieht, so daß asymmetrische Teile nach Belieben gewendet werden können. Günstig ist isometrisches Papier, um die einzelnen Muster leicht aufzeichnen zu können.

Offensichtlich muß jedes Muster, das aus zwei oder mehr Hexiamonds geformt wird, eine durch 6 teilbare Anzahl von Einheitsdreiecken enthalten. Man kann noch weiter gehen. Indem man die Stücke wie im Bild 116 färbt, erkennt man, daß jedes außer den beiden letzten Stücken (Sphinx und Yacht) in dem Sinn „ausgewogen" ist, daß es von jeder Farbe drei Dreiecke enthält. Daher muß jede Figur, die man durch Aneinanderfügen von zwei oder mehreren „ausgewogenen" Hexiamonds erzeugt, wieder „ausgewogen" sein. Yacht und Sphinx sind beide im Verhältnis vier zu zwei „unausgewogen". Tritt eines dieser beiden Stücke in einer Figur auf, muß diese durch einen Überschuß von zwei Dreiecken „unausgewogen" sein. Werden beide Stücke verwendet, so muß die Figur entweder „ausgewogen" (falls Yacht und Sphinx so angeordnet sind, daß sie einander aufheben) oder durch einen Überschuß von vier Dreiecken „unausgewogen" sein. Dies liefert eine leistungsfähige Kontrolle, um viele Figuren zu eliminieren, die sonst als mögliche Formen betrachtet werden könnten.

Man betrachte beispielsweise das gleichseitige Dreieck sechster Ordnung im Bild 117 oben. Es enthält 36 Einheitsdreiecke; es ist das einzige Dreieck innerhalb des Bereiches der 12 Hexiamonds, das eine durch 6 teilbare Anzahl von Einheitsdreiecken enthält. Man könnte nun viele Stunden darauf verwenden, um vergebens zu probieren, dieses Dreieck aus sechs Hexiamonds zusammensetzen. Wenn es jedoch wie im Bild 117 gefärbt ist, erkennt man, daß es einen Überschuß von sechs Dreiecken der einen Farbe enthält. Da der maximal zu erhaltende Überschuß vier ist, ergibt sich sofort, daß diese Figur unmöglich gebildet werden kann (Bild 118).

Natürlich wendet sich die Aufmerksamkeit nun Parallelogrammen zu. Nur die 3 mal 3 und 6 mal 6 Diamonds (Rhomben) enthalten die richtige Anzahl von Dreiecken. Im Falle des kleinen Diamond erkennt man leicht, daß er nicht möglich ist; der 6 mal 6 Diamond jedoch hat eine große Anzahl von bekannten Lösungen. Eine davon, welche im Bild 119 oben gezeigt wird, wurde von Maurice J. Povah aus Blackburn, England, angegeben. Sie ist auf Grund der folgenden beiden Tatsachen interessant: Alle Stücke außer dem Hexagon berühren den Rand, und eine Linie teilt das Muster in zwei kongruente Hälften. Diese Hälften können natürlich auf andere Arten miteinander verbunden werden, um symmetrische Figuren zu ergeben.

Für Parallelogramme sind folgende Tatsachen bekannt:

1. Ist eine Seite 2, so muß die andere ein Vielfaches von 3 sein. 2 mal 3 ist nicht möglich. 2 mal 6 hat eine Lösung (falls man unabhängige Spiegelungen der beiden Hälften nicht berücksichtigt), diese ist in Bild 118 zu sehen. Man kann leicht zeigen, daß nur

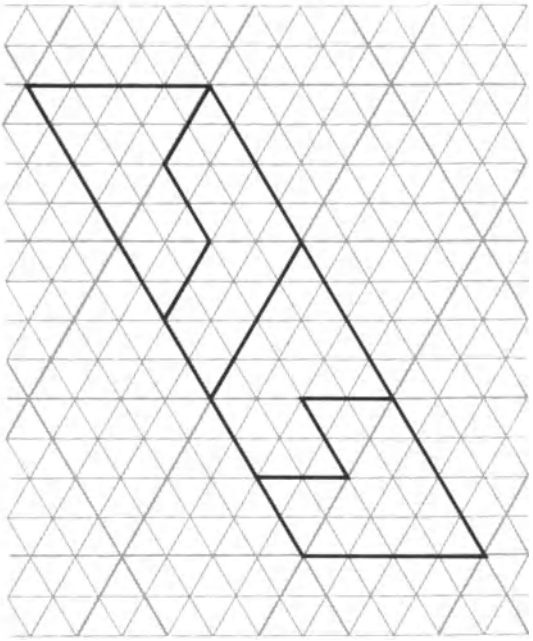


Bild 118
Das einzig mögliche Parallelogramm mit einer Seitenlänge 2

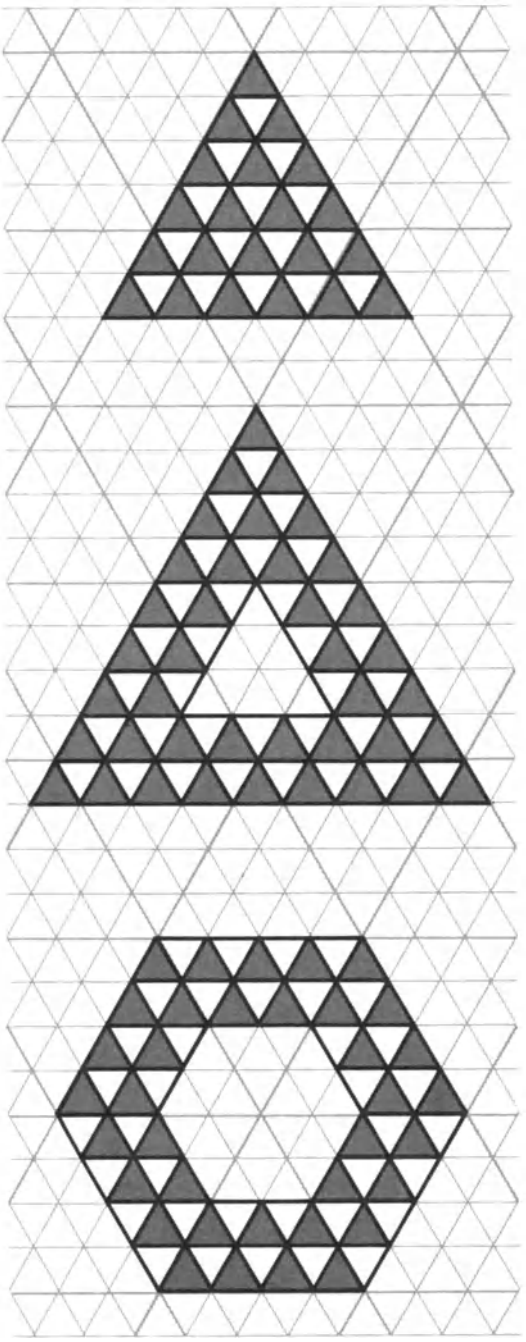


Bild 117
Drei „nicht mögliche" Hexiamonds-Muster

diese vier Stücke für Parallelogramme mit der Seitenlänge 2 zu verwenden sind. Denn das Rhomboidstück (Bild 116) läßt längsseitig einen Raum frei, der nicht gefüllt werden kann; jedes der anderen Stücke teilt die Figur in zwei Flächen, die beide eine ungerade Anzahl von Einheitsdreiecken enthalten. Da eine ungerade Zahl kein Vielfaches von 6 sein kann, ist kein weiteres Parallelogramm mit der Seitenlänge 2 möglich.

2. Ist eine Seite 3, so wird das Parallelogramm ein Vielfaches von sechs Dreiecken enthalten. 3 mal 3 ist nicht möglich. 3 mal 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 sind alle möglich, jedes mit vielen Lösungen.

   3 mal 11 ist möglich, aber es ist so schwer zu erhalten, daß ist die Lösung als eine „Übung für Fortgeschrittene" dem Leser überlasse. Bei allen bekannten Lösungen (eine wird im Lösungsteil angegeben) ist das Bat (siehe Bild 116) das weggelassene Stück.

   Das 3 mal 12 Parallelogramm, für das man alle 12 Hexiamonds benötigt, ist das bedeutsamste ungelöste Problem auf diesem Gebiet (Bild 119 unten). Bis jetzt wurde weder eine Lösung gefunden noch wurde ein Beweis für die Unlösbarkeit des Problems geliefert. Kann hier ein Leser Licht ins Dunkel bringen?

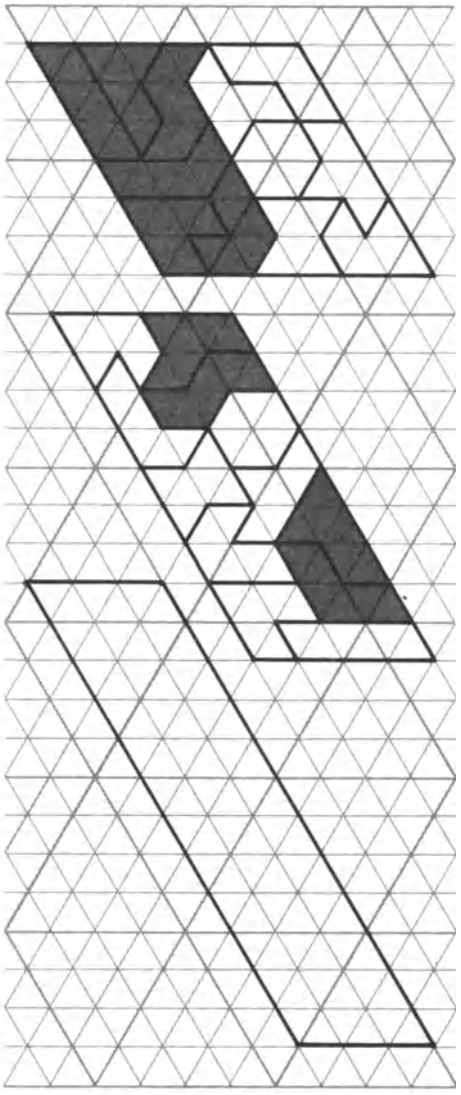


Bild 119
Parallelogramme, die alle 12 Hexiamonds enthalten

3. Ist eine Seite 4, so muß die andere ein Vielfaches von 3 sein. 4 mal 3 (früher bereits als 3 mal 4 erwähnt) ist möglich. Ebenso 4 mal 6. 4 mal 9, das alle 12 Stücke verwendet, hat viele Lösungen, wovon eine im Bild 119, Mitte, gezeigt wird. Die gerasterten Abschnitte können durch Spiegelungen drei weitere Lösungen ergeben.
4. Ist eine Seite 5, so ist das einzige Parallelogramm mit einer passenden Anzahl von Dreiecken das 5 mal 6 Parallelogramm. Dafür gibt es viele Lösungen.

Charles H. Lewis aus Roslyn, New York, war der erste, der ringförmige Figuren wie im Bild 117, Mitte und unten, vorschlug. Es ist leicht zu zeigen, daß der Dreiecksring nicht möglich ist; dazu färbt man ihn und stellt fest, daß er durch einen Überschuß von sechs Dreiecken „unausgewogen" ist. Der Sechseckring dagegen ist „ausgewogen", aber ein einfacher Beweis für die Unmöglichkeit seiner Darstellung wurde von Meredith G. Williams aus Washington entdeckt. Für das Sechseck gibt es nur zwei Stellungen, alle anderen können durch Rotation und Spiegelung der Figur erhalten werden. In jeder der beiden Stellungen ist es unmöglich, den Lobster (siehe Bild 116) hinzuzufügen, ohne das verbleibende Feld in zwei Teile zu teilen, von denen weder der eine noch der andere eine Fläche hat, die ein Vielfaches von 6 ist.

Viele Muster mit dreifacher Symmetrie sind geschaffen worden. Es existieren Sechsecke der Ordnungen 2 und 3, wie das von Adrian Struyk aus Paterson, New Jersey, gefundene Sechseck der Ordnung 3 klarmacht („a" im Bild 120). Struyk fand auch verschiedene Wege, das in „b" gezeigte Kleeblatt zu formen. Diese Anordnung erlaubt es, ein Sechseck so zu verschieben, daß eine gerade Kette von drei Sechsecken entsteht. In „c" hat Struyk das Sechseck in zwei kongruente Hälften geteilt und in „d" hat er ein Muster hergestellt, das um ein regelmäßiges Oktaeder gefaltet werden kann. Bild 121 zeigt eine Reihe von bemerkenswerten Hexiamond-Mustern mit zwei- und dreifacher Symmetrie; sie wurden von Povah entdeckt. Man beachte, daß die oberste Figur eine Lösung des Problems, drei kongruente Formen unter Verwendung aller 12 Stücke zu bilden, enthält.

Das Verdoppelungsproblem – es sind dabei doppelt so hohe Ebenbilder von jedem Hexiamond unter Verwendung von vier Stücken zu formen – kann für jede Figur leicht gelöst werden. Lewis bemerkte, daß die zwei Hälften des 6 mal 2 Parallelogramms (Bild 118) auf unterschiedlichste Weise zusammengesetzt werden können und man so alle Hexiomonds außer Pistol, Crown und Lobster (Bild 116) verdoppeln kann. Das Verdreifachungsproblem – dabei sind größere Ebenbilder aus neun Stücken zu formen – ist für Sphinx und Yacht unlösbar (diese sind mit einem Überschuß von sechs Dreiecken „unausgewogen"). Die anderen Stücke sind „ausgewogen" und es wurden mit Ausnahme des Butterfly für jedes von ihnen Verdreifachungen gefunden. Man vermutet, daß das Problem für den Butterfly unlösbar ist.

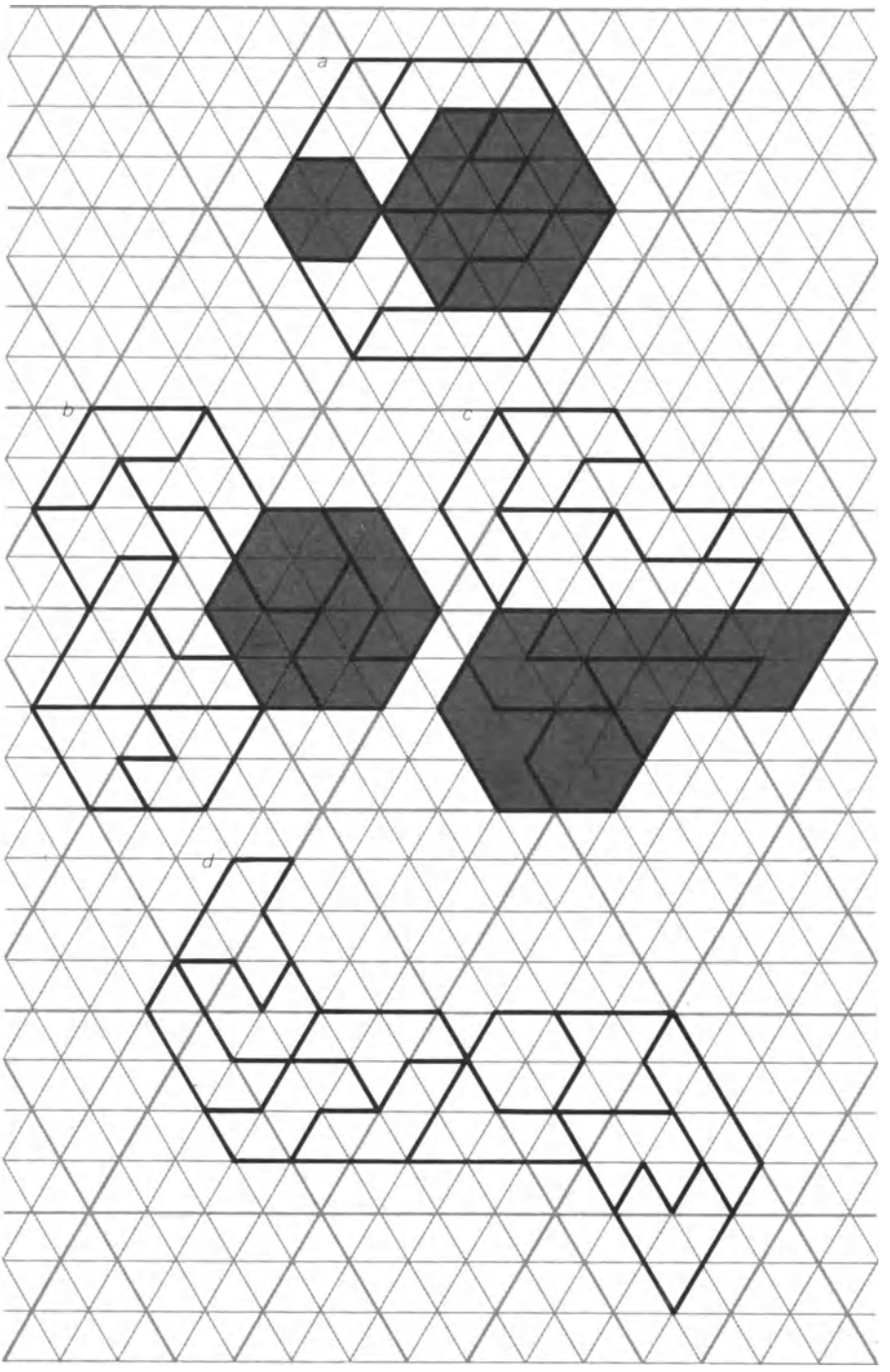


Bild 120 Hexiamonds-Muster von Adrian Struyk. Das untere Muster bedeckt ein regelmäßiges Oktaeder

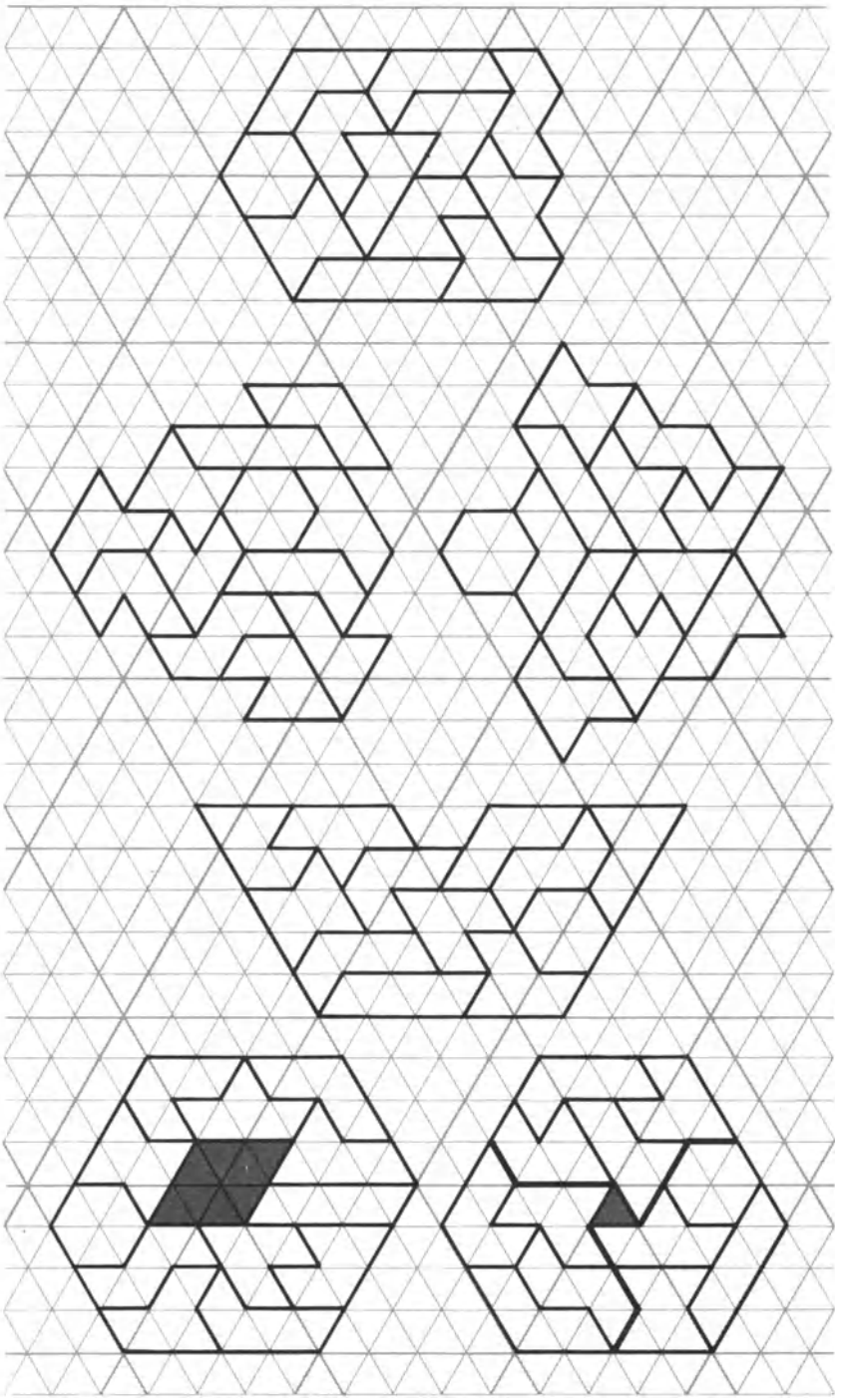


Bild 121 Symmetrische Hexiamond-Muster von Maurice J. Povah

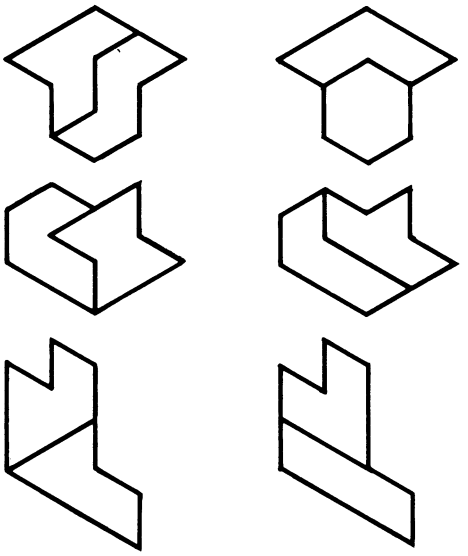


Bild 122 Eine Lösung des „Drei-Zwillinge"-Problems

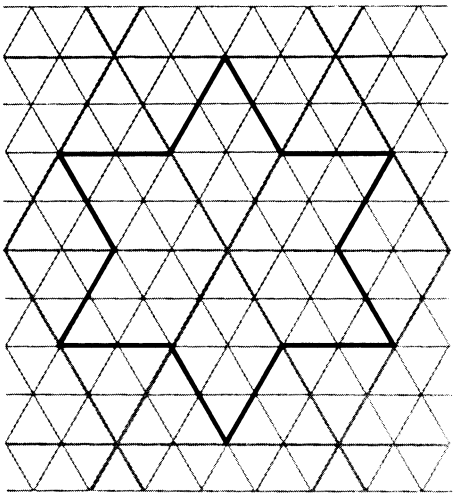


Bild 123 Ein aus acht Stücken zu bildender Stern

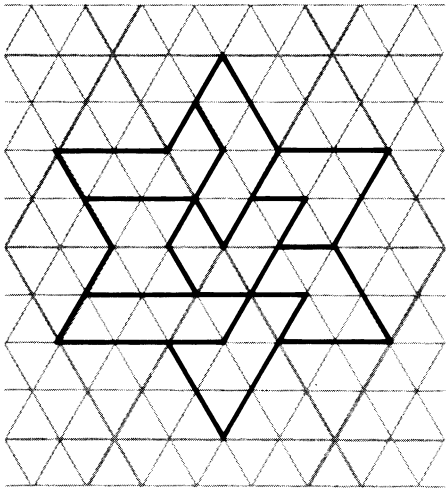


Bild 124 Die einzige Lösung für den Stern

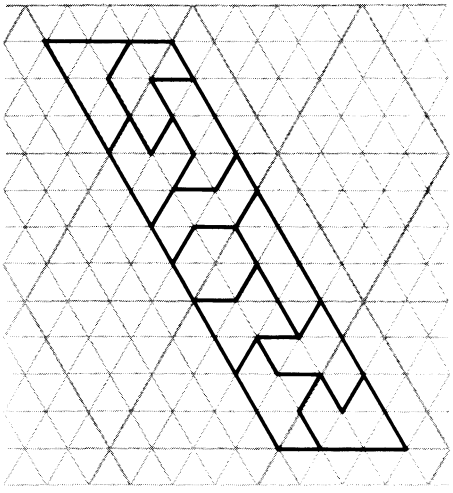


Bild 125 Eine Lösung für das 3 × 11 Parallelogramm

Bild 122 stellt Povahs Lösung für ein Problem dar, das „die drei Zwillinge" genannt wird. Bild 123 zeigt einen sechszackigen Stern, für dessen Lösung 8 Stück notwendig sind. Man nimmt an, daß sie die einzige Lösung ist. Dieses Problem ist nicht schwierig und die Beschäftigung damit stellt einen ausgezeichneten Zugang zu dem durch Hexiamonds gewährten Vergnügen dar. Ein Hinweis dazu: Weder die Snake, noch das Hexagon oder die Crown können zum Umfang des Sterns beitragen.

Lösungen

Daniel Dorritie aus Endicott, New York, lieferte als erster einen Beweis dafür, daß das Verdreifachungsproblem für den Butterfly unlösbar ist. Ähnliche Beweise wurden von Ester Blackburn aus Montreal, Wade E. Philpott aus Lima, Ohio und Dennis C. Rarick, einem Studenten der Indiana University gefunden. Karl Schaffer, einem Studenten aus Birmingham, Alabama, gelang es, zu beweisen, daß die im Bild 124 gezeigte Lösung für den sechszackigen Stern tatsächlich die einzige ist. Alle diese Beweise sind vom gleichen Typ, und zwar werden alle Möglichkeiten ausgeschöpft; sie sind zu lang, um hier angegeben zu werden.

Das ausstehende ungelöste Problem des 3 mal 12 Parallelogramms wurde am Lawrence Radiation Laboratory der University of California gelöst. Ein Computerprogramm von John G. Fletcher war ursprünglich zum Testen von Pentomino-Problemen geschrieben worden; eine triviale Modifikation des Programms durch Fletcher ermöglichte das Testen von Hexiamond-Mustern. Es zeigte sich, daß das 3 mal 12 Parallelogramm unlösbar ist und daß das 3 mal 11 Parallelogramm 24 verschiedene Lösungen hat, wobei alle den Bat nicht verwenden. (Eine Lösung wird im Bild 125 gezeigt.)

Ein früheres Computerprogramm von Mrs. John Leech, England, ergab 155 Lösungen für das 6 mal 6 Parallelogramm, 74 Lösungen für das 4 mal 9 Parallelogramm und keine Lösung für das 3 mal 12 Parallelogramm. Ihr Programm war – wie das von Fletcher – eine Modifikation eines ursprünglich für Pentominos vorgesehenen Programms. Andrew L. Clarke, Wellesey, England, gab Beweise (ohne die Hilfe eines Computers) für das 3 mal 12 Prallelogramm, den Butterfly und den sechszackigen Stern.

Sätze von Plastikhexiamonds wurden Ende der Sechzigerjahre unter verschiedensten Handelsbezeichnungen in England, Japan und der Bundesrepublik verkauft.

18 Tetraeder

Vier beliebige Punkte (*A, B, C, D*) im Raum, die nicht alle in einer Ebene liegen, stellen die Eckpunkte von vier Dreiecken dar (Bild 126). Diese Dreiecke sind ihrerseits die Flächen eines Tetraeders, des einfachsten Polyeders (Körper, die durch Polygone begrenzt sind). Sind alle Flächen eines Tetraeders gleichseitige Dreiecke, so spricht man von einem regelmäßigen Tetraeder, dem einfachsten der fünf platonischen Körper. Dieser Körper ist so einfach, daß er schon im alten Ägypten bekannt war und von den Mathematikern wahrscheinlich ebenso früh wie der Würfel studiert wurde.

Die griechischen Pythagoreer glaubten, daß das Feuer aus winzigen Tetraederstükken aufgebaut sei, zu klein um sichtbar zu sein. Da das Tetraeder weniger Flächen und spitzere Ecken als jeder andere regelmäßige konvexe Körper hat, müßte es – so argumentierten sie – das Instabilste und „Durchdringendste" der vier Elemente Erde, Luft, Feuer und Wasser sein. Heute wissen wir es besser, aber in gewissem Sinn war diese Vermutung der Pythagoreer scharfsinnig, wie viele Vermutungen dieser Schule; denn die Tetraederstruktur taucht in vielen Erscheinungen der Mikrowelt auf. Das sogenannte „Kohlenstoffatom", ohne das organische Moleküle und jedes uns bekannte Leben nicht möglich wären, besteht in Wirklichkeit aus einem Atom Kohlenstoff, das chemisch an vier andere Atome gebunden ist, die an den Spitzen eines Tetraeders schwingen. Beispielsweise besteht ein Molekül Tetrachlorkohlenstoff – ein bekanntes Reinigungsmittel – aus einem Atom Kohlenstoff, das auf diese Weise an vier Atome Chlor gebunden ist. Viele Kristallgitter, einschließlich das des Diamanten, haben die Struktur eines Tetraeders. Ein wichtiges Kupfererz, das ein Tetraedergitter hat, wird Tetrahedrit genannt, da es sehr oft in großen, gut ausgebildeten Tetraederkristallen gefunden wird.

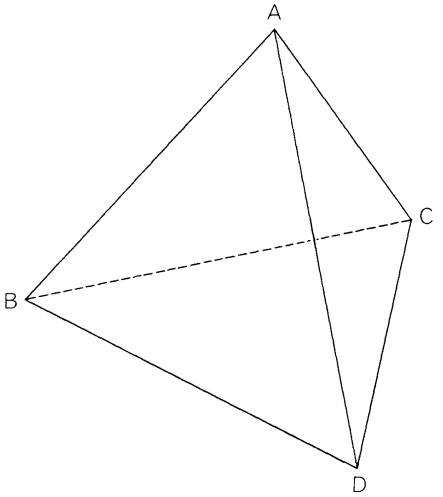
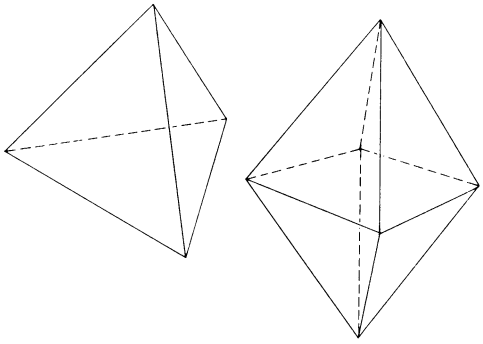
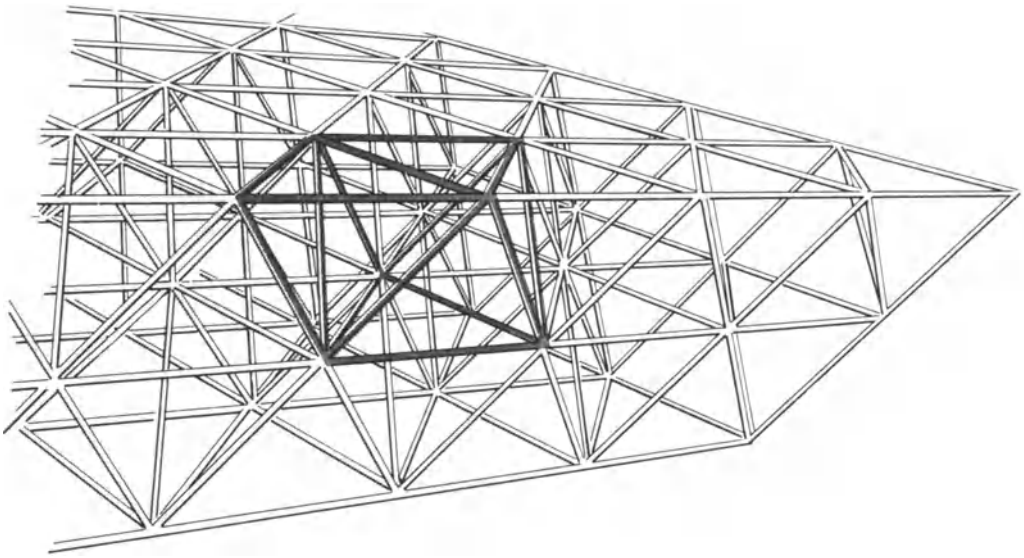


Bild 126
Ein regelmäßiges Tetraeder

Bild 127

Tetraeder und Oktaeder (oben) und die dichte Raumausfüllung durch alternierende Anordnung der beiden Polyeder (unten)





Quadrate derselben Größe passen schachbrettartig zusammen und können so die gesamte Ebene ausfüllen; in ähnlicher Weise können Würfel den Raum dicht füllen. Da gleichseitige Dreiecke ebenfalls die Ebene dicht überdecken, könnte man annehmen, daß auch regelmäßige, kongruente Tetraeder in dichter Packung den Raum ausfüllen. Dies scheint intuitiv so evident zu sein, daß sogar Aristoteles dies in seinem Werk „Über dem Himmel" als gegeben hinstellte. Tatsächlich hat aber unter den platonischen Körpern nur der Würfel diese Eigenschaft. Hätte sie auch das Tetraeder, so würde es schon seit langem dem Würfel in der Verpackungstechnik Konkurrenz machen.

Interessanterweise füllen regelmäßige Tetraeder und Oktaeder (regelmäßige Körper, die durch acht Dreiecke begrenzt werden) den Raum dicht aus, falls sie abwechselnd (wie im Bild 127 gezeigt) angeordnet werden. Sie sind die beiden einzigen regelmässigen Körper, die zusammen den Raum dicht ausfüllen. Man beachte, daß in dem Gitter jedes Dreieck sowohl eine Tetraeder- als auch eine Oktaederfläche darstellt und jede Spitze von acht Tetraedern und sechs Oktaedern umgeben ist. Diese schöne, regelmäßige Struktur wurde in den vergangenen Jahren durch den Erfinder-Architekten R. Buckminster Fuller verwertet. Das freitragende Fachwerk, das er „Octet" nennt, besteht aus Alu-

miniumrohren, die zu einem Netzwerk zusammengefügt werden, das die Kanten eines Oktaeder-Tetraeder-Wabenmusters darstellt. (Eine anregende Aufgabe beispielsweise für eine Schulstunde ist es, ein solches Wabenmuster durch das Zusammenfügen einer großen Anzahl von Strohhalmen derselben Länge zu bilden.) Fullers berühmtere „geodätische" Bauten sind hauptsächlich Tetraedergitter, die – wie sein „Octett" – vor allem ein Maximum an Festigkeit bei einem Minimum an Gewicht und Kosten ergeben.

Fuller ist nicht der erste bekannte amerikanische Erfinder, der von dem großen Verhältnis von Festigkeit zu Gewicht fasziniert wurde. Nachdem Alexander Graham Bell als Erfinder des Telephons Berühmtheit erlangt hatte, entwickelte er ein fast besessenes Interesse an Tetraedern. Die Anstrengungen, Flugzeuge zu bauen, waren um 1890 fehlgeschlagen, da den Motoren die Leistung fehlte, um die Flugzeuge in der Luft zu halten; Bell vermutete die Antwort darin: große mit Seide überzogene Drachen nach einem Tetraeder-Wabenmuster aus Aluminiumrohren zu konstruieren. Auf seinem Sommersitz in Baddeck, Nova Scotia, baute er eine phantastische Vielfalt solcher Drachen. Um sie im Flug zu beobachten, errichtete er eine 80 Fuß hohe Plattform, die auf der obersten Spitze eines aus drei Fachwerken konstruierten Tetraeders stand; jedes der drei Fachwerke war wieder ein Netzwerk von Tetraedern. Auf dieser Fläche baute er eine hölzerne Beobachtungshütte ebenfalls in der Form eines Tetraeders. Als 1955 das Alexander Graham Bell Museum in Baddeck gebaut wurde, wählte man als architektonisches Grundmotiv für das gesamte Gebäude ein Tetraeder.

Bell wäre sicherlich über die neuere Adaptierung der Tetraederform für Verpackungen entzückt gewesen. Man drücke das untere Ende einer Röhre aus Papier zusammen und verklebe es zu einer geraden Kante; dann führe man dasselbe am oberen Ende aus, aber um 90 Grad versetzt; dadurch ergibt sich schließlich ein Tetraeder. Beträgt der Umfang der Röhre 4 Einheiten und ihre Höhe $\sqrt{3}$, so ergibt sich ein regelmäßiges Tetraeder (Bild 128). Diese rationelle Konstruktionsmethode liegt einem in Schweden Mitte der Fünfziger Jahre entwickelten Papierbehälter mit dem Handelsnamen „Tetra Pak" zugrunde. Er eroberte zuerst Europa und wird nun auch in steigendem Maße in den USA verwendet, hauptsächlich als Milch- und Sahnebehälter.

Eine völlig andere Anwendung der Tetraederform zeigt Bild 129. Im 2. Weltkrieg wurde das „Caltrop" genannte, vierzackige Gerät zum Aufstechen von Reifen feindlicher Fahrzeuge verwendet. Hunderte von ihnen werden auf die Straße geworfen und jedes zeigt mit einer Spitze nach oben; weiterhin verursacht diese Form ein maximales Eindringen in den Reifen. Die Idee für dieses Gerät ist alt. "The Oxford English Dictionary" definiert ein Caltrop als „eine Eisenkugel mit vier scharfen Zacken, die in der Form eines Tetraeders angeordnet sind, so daß – auf den Boden geworfen – immer eine Spitze nach oben zeigt; verwendet wird es, um das Vorrücken der Kavallerie usw. zu hemmen." Eines der verschiedenen Zitate aus dem 16. Jahrhundert im Lexikon besagt: „Die Iren hatten überall am Strand eine große Zahl von Caltrops aus Eisen ausgestreut, die mit scharfen Spitzen nach oben wiesen, um die Dänen an den Füßen zu verwunden." Und Oliver Wendell Holmes schrieb 1858: „Eine Art dieser kleinen *calthrops* verwendeten unsere Großväter, um sie ins Gras zu streuen, wenn Indianer in der Nähe waren..."

Eine neuere Anwendung der Caltrop-Struktur stellt das sogenannte „Tetrapod" dar, ein riesiges, viergliedriges Objekt aus Eisenbeton, viele Tonnen schwer. Es gleicht

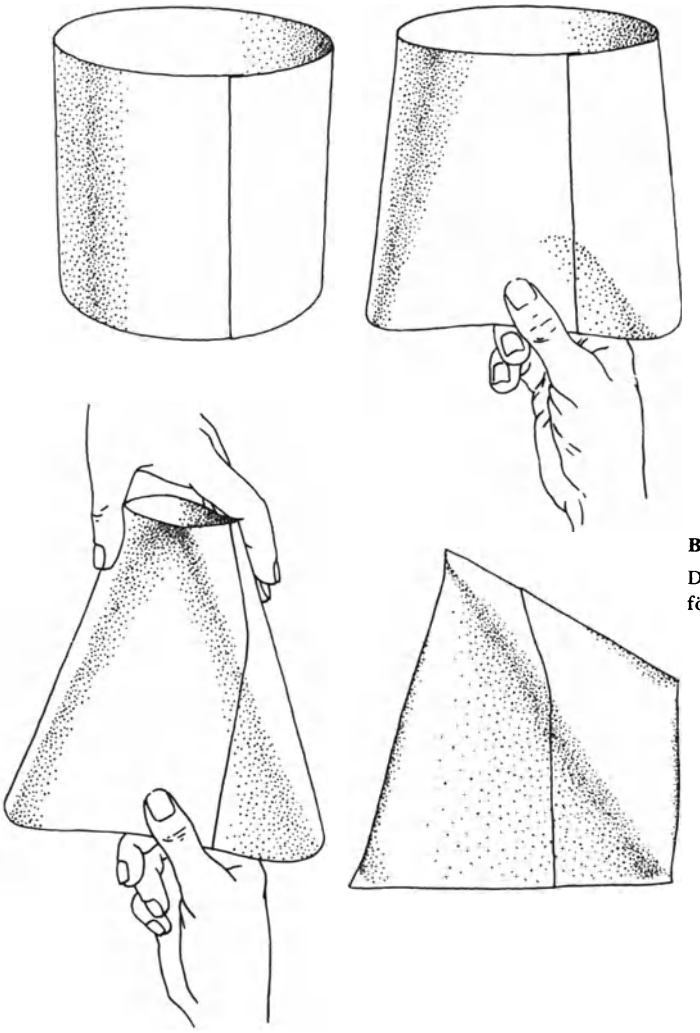


Bild 128
Die Herstellung eines tetraederförmigen Behälters

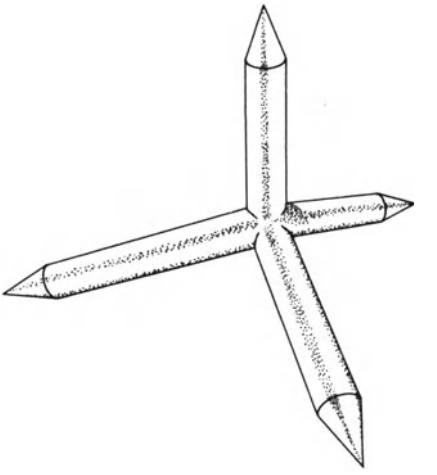


Bild 129
Tetraederförmiges Gerät zum Aufstechen von Reifen

einem dicken Caltrop mit flachen anstatt spitzen Enden. Werden tausende von ihnen an einer Küste übereinander gestapelt, so haken sie sich ineinander und ergeben äußerst wirksame Wellenbrecher. Die „New York Times" vom 21. Februar 1965 beschrieb auf Seite 19 ihre weitverbreitete Anwendung im Hafen von Ashdod in Israel.

Das vierdimensionale Analogon des Tetraeders wird „Pentatope" genannt. Wird ein Punkt im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Eckpunkten verbunden, so stellt dies die Projektion eines Tetraeders in die Ebene dar. Auf ähnliche Weise kann man einen Punkt im Inneren eines Tetraeders mit den Eckpunkten verbinden und erhält so die Projektion eines Pentatopes in den dreidimensionalen Raum (Bild 130). Es ist leicht zu erkennen, daß das Pentatope fünf Ecken, zehn Kanten, zehn Dreiecksflächen und fünf tetraederförmige Zellen hat. (In dieser Projektion sieht man vier kleine und eine große Zelle. Bei einem regelmäßigen Pentatope sind alle Zellen kongruent. Fünf beliebige Punkte des vierdimensionalen Raumes, welche nicht alle in einer dreidimensionalen Hyperebene liegen, stellen die Eckpunkte eines Pentatopes dar, und je vier Punkte davon ergeben die Eckpunkte einer tetraederförmigen Zelle. Sind die fünf Punkte so im vierdimensionalen Raum angeordnet, daß je zwei immer dieselbe Entfernung voneinander haben, so ergibt dies ein regelmäßiges Pentatope, einen der sechs regelmäßigen konvexen Körper mit vier Dimensionen.

Ebenso wie die vier Flächen eines Tetraeders auseinandergefaltet werden können, so daß sie eine ebene Figur ergeben, die aus einem zentralen Dreieck und drei weiteren, an den Kanten angehängten Dreiecken besteht, so ist auch folgendes für ein Pentatope möglich: Die fünf tetraederförmigen Zellen, die die Hyperflächen des Pentatopes darstellen, können in den dreidimensionalen Raum „auseinandergefaltet" werden und ergeben ein sternförmiges Tetraeder, d. h. ein zentrales Tetraeder mit je einem weiteren Tetraeder an jeder Fläche (Bild 131). Wenn man wüßte, wie man einen solchen Körper in die vierte Dimension zurückzufalten hat, könnte man einen pentatopeförmigen Behälter für „Hypersahne" herstellen.

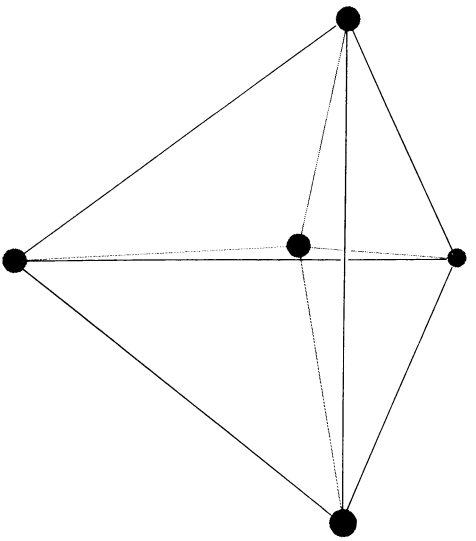


Bild 130
Die Projektion eines Pentatopes in den dreidimensionalen Raum

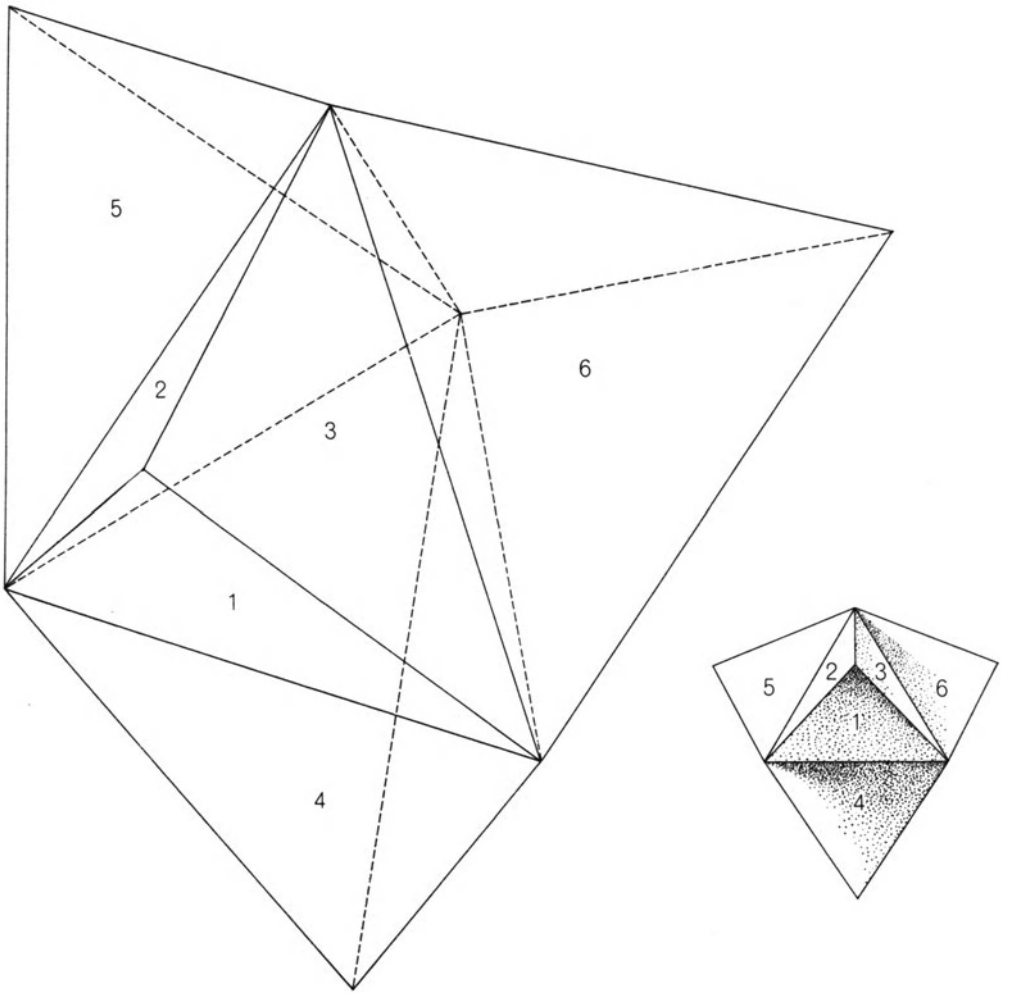


Bild 131 Ein in den dreidimensionalen Raum aufgeklapptes Pentatope

Eine seltsame, wenig bekannte Eigenschaft des regelmäßigen Tetraeders – eine Eigenschaft, die kein anderer platonischer Körper aufweist – ermöglicht einen erstaunlichen Zaubertrick, mit dem man seine Fähigkeit demonstrieren kann, „Farbschwingungen" mit den Fingern feststellen zu können. Zuerst stelle man ein kleines, regelmäßiges Tetraeder her, dessen Flächen kongruent zu den Dreiecken im Bild 132 sind. (Eine Anleitung, um ein solches Modell schnell herzustellen, stammt von Charles W. Trigg. Man schneide das Muster im Bild 133 aus steifem Papier oder Karton aus. Anschließend falte man entlang aller Linien in dieselbe Richtung, falte die weißen Dreiecke zu einem Tetra-

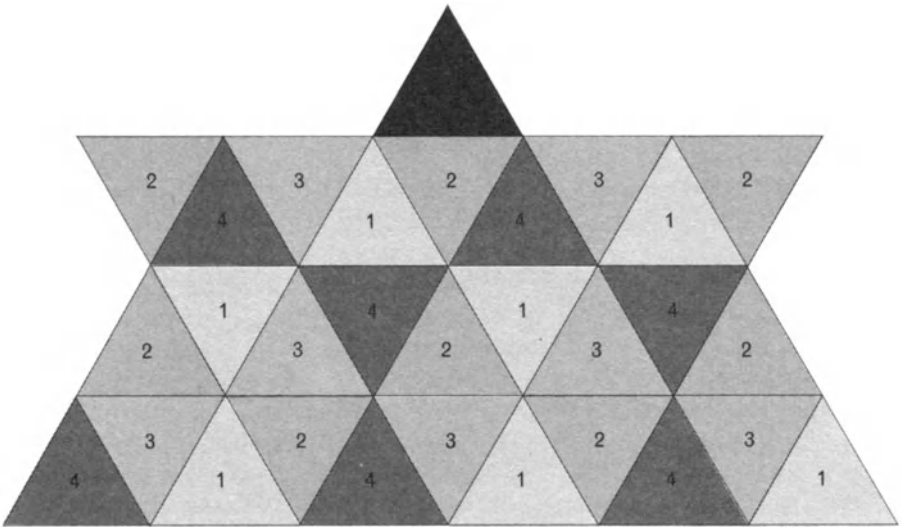


Bild 132 Das Brettmuster für den Zaubertrick

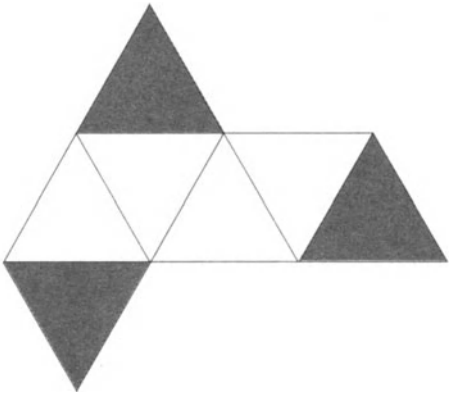


Bild 133
Die Vorlage, um ein Tetraeder zu falten

eder und stecke die gerasterten Dreiecke in die offenen Kanten, um so ohne zu Kleben ein stabiles Modell zu erhalten.) Dann lege man dieses Modell auf das schwarze Dreieck, welches im Muster 132 oben liegt (oder auf ein Brett, das man durch Kopieren des Musters 132 erhält – mit verschiedenen Farben für jede der numerierten Raster). Während man sich nun wegdreht, „rollt" ein Zuseher das Modell entlang eines beliebigen Weges über das Muster, wobei es jeweils über eine Kante von Dreieck zu Dreieck gekippt wird. Der Zuschauer stoppt, wann er wünscht, merkt sich die Farbe, auf der das Tetraeder liegt und läßt es hier liegen, bis er langsam bis 10 gezählt hat. Dann *schiebt* er das Tetraeder zurück auf das schwarze Dreieck. Man dreht sich nun um, hebt das Tetraeder auf, befühlt seine Unterseite und nennt die Farbe, auf der es zuletzt lag.

Dieses Kunststück verbindet Geometrie mit einem Kartenspielertrick. Eine der üblichen Methoden, um während eines Spieles Spielkarten zu markieren, ist es, mit der Fingerspitze am Kartenrand einen Schmutzfleck anzubringen, der den Wert der Karte angibt. Dieser Schmutzfleck unterscheidet sich kaum von den Flecken, die auf vielbenützten Karten am Rand zu sehen sind. Man kann diesen Fleck mit Hilfe eines Bleistiftes erzeugen, den man einigemale über dieselbe Stelle eines Papiers reibt. Dann wischt man mit einer Fingerspitze über den Graphit und preßt sie anschließend an eine Ecke einer Fläche des Tetraeders. Dabei soll der Schmutzfleck so fein werden, daß niemand außer man selbst ihn je bemerkt.

Man lege das heimlich markierte Tetraeder so auf das schwarze Dreieck, daß das Zeichen an der oberen Ecke ist und zum Muster schaut. Am Ende des Tricks wird die Lage des Schmutzflecks die Farbe anzeigen, auf der das Modell am Ende lag. Während man vorgibt, die Unterseite des Modells zu befühlen, schaut man direkt auf das Tetraeder. Der Schmutzfleck wird in einer von vier Stellungen sein; jede von ihnen gibt eine der vier Farben an (Bild 134). Ich überlasse es dem Leser, festzustellen, warum der Trick immer funktioniert.

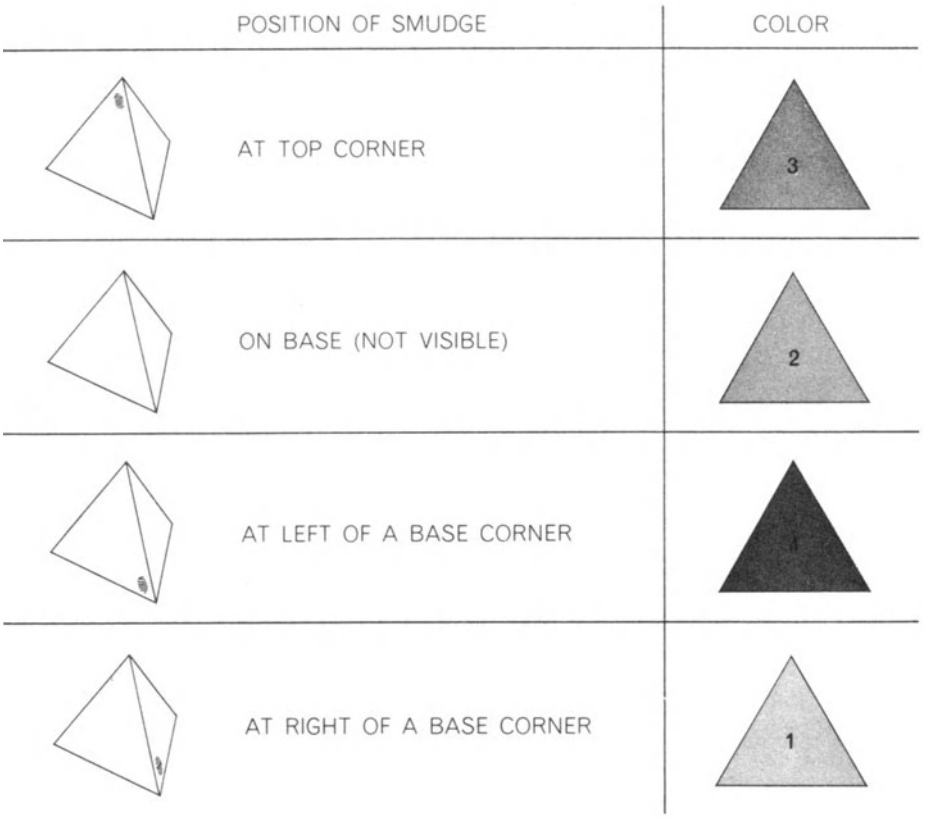


Bild 134 Der Schlüssel zum Zaubertrick

Die folgenden Aufgaben, die sich mit Tetraedern befassen, sind nicht schwer, jedoch haben einige von ihnen überraschende Lösungen.

1. Ein regelmäßiges Tetraeder wird gleichzeitig von sechs verschiedenen Ebenen geschnitten. Jede schneidet den Körper genau in die Hälfte, indem sie durch eine Kante läuft und die gegenüberliegende Kante in zwei gleiche Teile schneidet. Wie viele Stücke ergeben sich?
2. Kann jedes Papierdreieck so entlang dreier Linien gefaltet werden, daß sich ein (nicht unbedingt regelmäßiges) Tetraeder ergibt? Ist dies nicht der Fall, so gebe man die Bedingungen an, die erfüllt sein müssen.
3. Im Inneren eines regelmäßigen Tetraeders kriecht ein Käfer vom Punkt A zum Punkt B (Bild 135). Die Seitenlänge des Tetraeders ist 20 Meter; jeder Punkt ist 7 Meter von einem Eckpunkt entfernt (auf der Höhenlinie des entsprechenden Dreiecks). Wie lang ist der kürzeste Weg des Käfers?
4. Wie viele Punkte können maximal auf eine Kugel gemalt werden, so daß der Abstand von je zwei Punkten immer derselbe ist?
5. Von einem regelmäßigen Tetraeder mit der Seitenlänge 2 wird an jeder Ecke ein regelmäßiges Tetraeder der Seitenlänge 1 abgeschnitten. Welcher Restkörper ergibt sich?
6. Ist es möglich, die Flächen eines Tetraeders so mit verschiedenen Zahlen zu versehen, daß die Summe der an einer Ecke zusammenlaufenden drei Flächen für jede Ecke dieselbe ist? Ist es möglich, die *Kanten* so zu beziffern, daß die Summe der an einer Ecke zusammenlaufenden Kanten für jede Ecke dieselbe ist? In beiden Fällen können die Zahlen rational oder irrational sein.
7. Wie groß ist die Seitenlänge des größten regelmäßigen Tetraeders, das noch in einen Würfel der Seitenlänge 1 paßt?

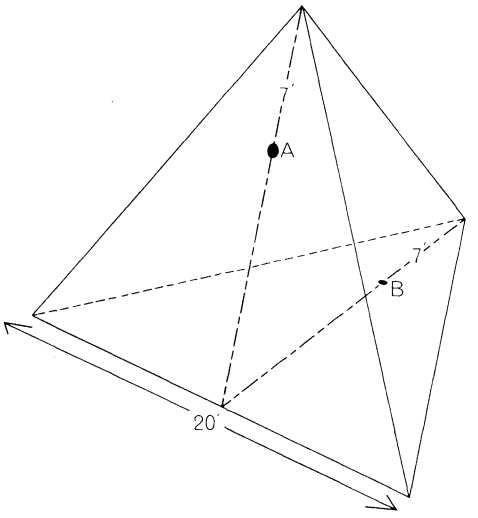


Bild 135
Das „Käfer-Problem"

8. Wie viele verschiedene Tetraeder kann man aus vier verschiedenfarbigen gleichseitigen Dreiecken zusammensetzen? Dabei werden zwei Tetraeder nur dann als gleich bezeichnet, falls man eines so drehen und neben das andere stellen kann, daß die Muster der beiden Figuren übereinstimmen. Stimmen die Muster erst nach einer Spiegelung überein, so werden diese beiden Tetraeder als verschieden gezählt.
9. Wenn jede der Flächen eines regelmäßigen Tetraeders entweder rot oder blau bemalt wird, so ist leicht zu erkennen, daß es nur fünf verschiedene Modelle gibt: Ein völlig rotes, ein völlig blaues, eines mit einer roten Fläche, eines mit einer blauen Fläche und eines mit zwei roten und zwei blauen Flächen. Wenn jede Fläche entweder rot, weiß oder blau bemalt wird, wie viele verschiedene Modelle gibt es dann? Wie zuvor werden Drehungen nicht als verschieden gezählt.

Lösungen

1. Ein regelmäßiges Tetraeder, das durch sechs Ebenen geschnitten wird, wobei jede durch eine Kante läuft und die gegenüberliegende Kante in zwei gleiche Teile schneidet, zerfällt in 24 Stücke. Dies sieht man leicht ein, wenn man beachtet, daß jede Fläche in sechs Dreiecke zerlegt wird (a im Bild 136); jedes davon stellt die Basis eines Tetraeders mit dem Scheitel im Mittelpunkt des Modells dar. (Dieses Problem wurde von Harry Longman in „Scripta Mathematica", März–Juni 1951, veröffentlicht.
2. Falls alle Winkel spitz sind, kann jedes Dreieck zu einem Tetraeder gefaltet werden.
3. Wie man mit Hilfe des auseinandergefalteten Tetraeders im Bild 136b, erkennt, ist der kürzeste Weg des Käfers zwischen A und B 20 Meter. Er ist um 0,64 Meter kürzer als der kürzeste Weg, der keine dritte Fläche berührt.
4. Die größte Anzahl von Punkten auf einer Kugel, so daß der Abstand zwischen je zwei Punkten immer derselbe ist, ist vier. Die Punkte markieren die Eckpunkte eines eingeschriebenen regelmäßigen Tetraeders.
5. Werden von einem regelmäßigen Tetraeder der Seitenlänge 2 an jeder Ecke regelmäßige Tetraeder der Seitenlänge 1 abgeschnitten, so ist der verbleibende Körper ein regelmässiges Oktaeder.
6. Es ist nicht möglich, die Flächen eines Tetraeders so mit vier verschiedenen Zahlen zu versehen, daß die Summe der an einer Ecke zusammenlaufenden drei Flächen für jede Ecke dieselbe ist. Man betrachte zwei beliebige Flächen A und B. Sie treffen an einer Ecke Fläche C, an einer anderen Ecke Fläche D. Damit die Summe an beiden Ecken gleich ist, müssen die Zahlen auf den Seiten C und D dieselben sein, was der Voraussetzung, daß alle Zahlen verschieden sind, widerspricht.
   Der Beweis (von Leo Moser) dafür, daß die Kanten eines Tetraeders nicht mit sechs verschiedenen Ziffern versehen werden können, damit sich gleiche Ecksummen ergeben, ist etwas länger. Zuerst bezeichne man die Kanten wie im Bild 136c. Man nehme an, das Problem sei lösbar. Dann gilt: $a + b + c = a + e + d$, d. h., $b + c = e + d$. Ähnlich

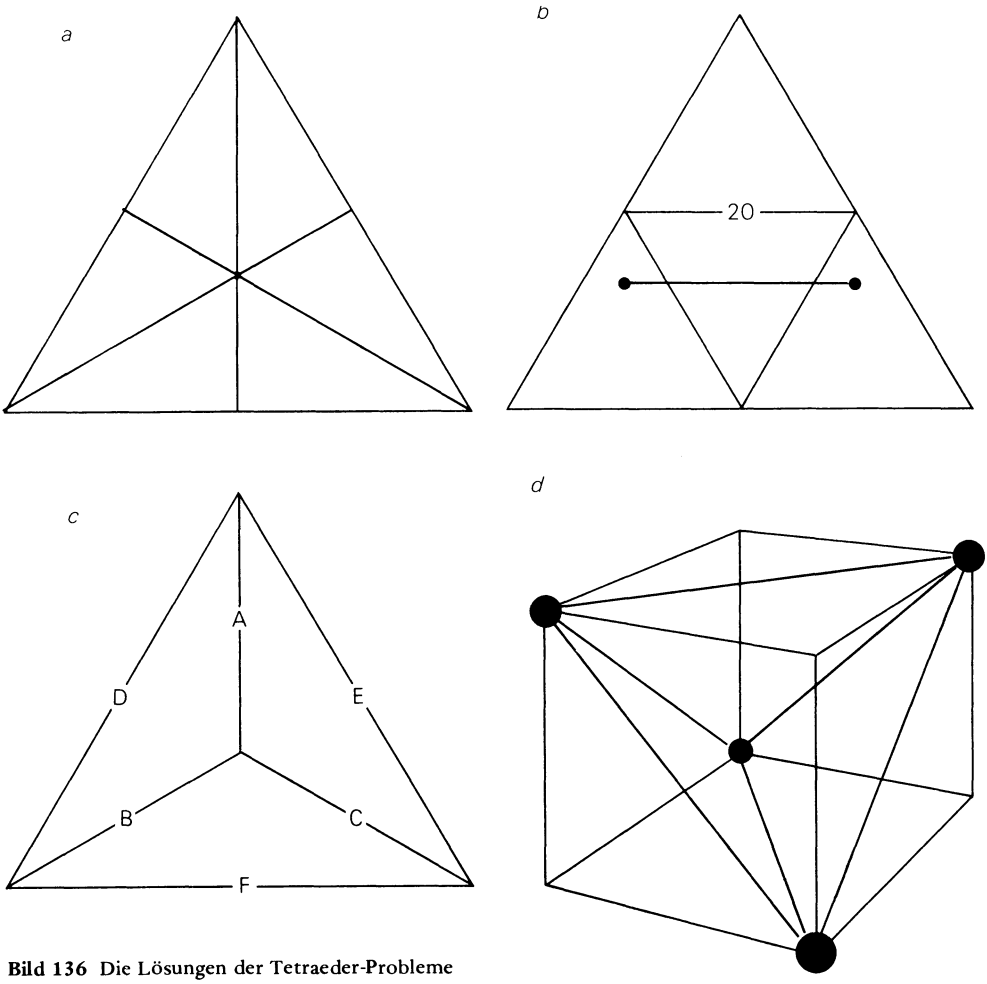


Bild 136 Die Lösungen der Tetraeder-Probleme

folgt $f + b + d = f + e + c$, d. h., $b + d = e + c$. Addiert man die beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{r} b + c = e + d \\ b + d = e + c \\ \hline 2b + c + d = 2e + c + d, \end{array}$$

so ergibt sich also $b = e$, was natürlich der Voraussetzung, daß alle Zahlen verschieden sind, widerspricht.

7. Die Seitenlänge des größten regelmäßigen Tetraeders, das noch in einem Würfel mit der Seitenlänge 1 Platz hat, ist $\sqrt{2}$ (Bild 136 d).
8. Vier gleichseitige Dreiecke von vier verschiedenen Farben können zu zwei verschiedenen Tetraedern zusammengesetzt werden; dabei ist eines das Spiegelbild des anderen.
9. Wenn jede der Flächen eines regelmäßigen Tetraeders entweder rot, weiß oder blau bemalt wird, so kann man 15 verschiedene Modelle herstellen: drei werden einfarbig sein, drei werden rote und blaue Flächen haben, drei rote und weiße, drei blaue und weiße und drei werden rote, weiße und blaue Flächen haben, wobei jeweils zwei Flächen dieselbe Farbe haben. Die Formel für die Anzahl von verschiedenen Tetraedern (wobei Spiegelbilder als verschieden, Drehungen als nicht verschieden gezählt werden), die man mit n Farben erzeugen kann, ist

$$\frac{n^4 + 11n^2}{12}.$$

19 Coleridges Äpfel und sieben weitere Probleme

1 Coleridges Äpfel

Wer würde schon glauben, daß der Dichter Samuel Taylor Coleridge an unterhaltender Mathematik interessiert war? Und doch lautet die erste Eintragung im ersten Band seiner Notizbücher (1957 durch Pantheon Books veröffentlicht): „Man wähle eine beliebige Zahl – man verdopple sie – man addiere dazu 12 – man halbiere dies – man ziehe die Ausgangszahl ab – und es ergibt sich sechs." Einige Jahre später schrieb Coleridge in einem Zeitungsartikel über den Wert dieses einfachen Tricks im Grundlagenunterricht der Arithmetik für kleine Kinder.

Die zweite Eintragung im Notizbuch ist: „Man betrete einen Obstgarten – Dieser hat drei Tore – Durch alle muß man hindurch – Man nehme eine bestimmte Anzahl von Äpfeln – Dem ersten Mann (offensichtlich steht bei jedem Tor ein Mann) gebe man die Hälfte davon und einen halben Apfel – Dem zweiten (Mann gebe man) die Hälfte der verbliebenen Äpfel und einen halben Apfel – Dem dritten (Mann gebe man) die Hälfte der restlichen Äpfel und einen halben Apfel – und doch braucht man keinen der Äpfel zu zerschneiden."

Wie lange braucht der Leser, um die kleinste Anzahl von Äpfeln zu ermitteln, mit der Coleridge beginnen könnte und dabei alle angegebenen Bedingungen erfüllen würde?

2 Die nach außen gewendete Hose

Jedes der beiden Enden eines 10 Meter langen Strickes wird fest um die Fußgelenke eines Mannes gebunden. Ist es möglich, seine Hose auszuziehen, deren Inneres am Strick nach außen zu wenden und sie dann wieder richtig anzuziehen, wobei der Strick weder zerschnitten noch aufgebunden werden darf? Partygäste sollten zuerst versuchen, dieses verwirrende topologische Problem zu lösen, bevor sie irgendwelche empirischen Versuche veranlassen.

3 Ein Münzenspiel

Das Spiel für zwei Personen, das im Bild 137 gezeigt wird, wurde entworfen, um damit das Prinzip zu erläutern, das im Endspiel von Dame, Schach und anderen mathematischen Brettspielen oft von entscheidender Bedeutung ist. Man lege einen Pfennig auf die Stelle mit der Nummer 2, eine Mark auf die Stelle 15. Die Spieler wechseln sich jeweils ab – einer zieht mit dem Pfennig, der andere mit der Mark. Gezogen wird entlang der gezeichneten schwarzen Linien zum nächsten gekennzeichneten Punkt. Der Spieler mit dem

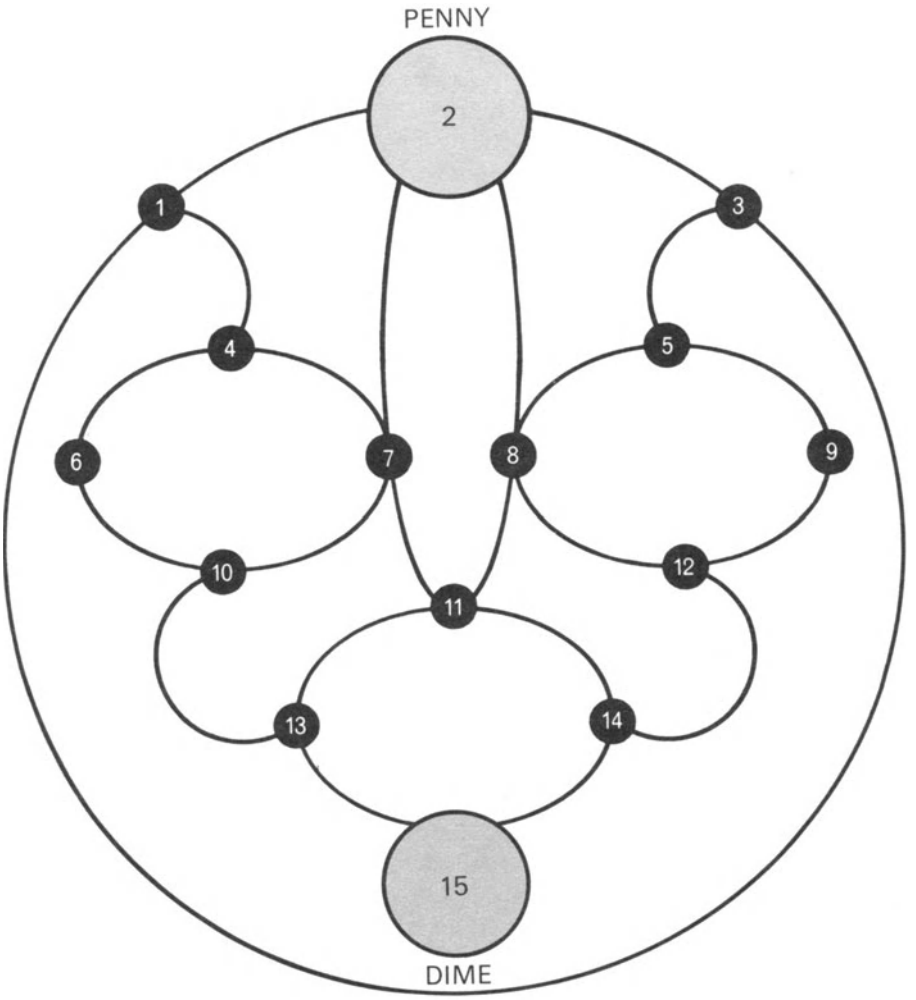


Bild 137 Kann der Pfennig die Mark immer abfangen? (Im Bild: penny=Pfennig; Dime=Mark!!)

Pfennig hat immer zu beginnen. Sein Ziel ist es, die Mark einzufangen, indem er bei einem Zug auf den von der Mark gerade besetzten Punkt kommt. Um zu gewinnen, muß er dies vor seinem siebenten Zug erreicht haben. Wenn er nach sechs Zügen die Mark noch nicht gefangen hat, so hat er verloren.

Es gibt eine einfache Strategie, mittels der ein Spieler immer gewinnen kann. Kann der Leser diese Strategie finden?

4 Wer lügt und wer sagt die Wahrheit?

Es gibt unzählige Probleme aus der Logik, die sich mit Lügnern und solchen, die die Wahrheit sagen, beschäftigen. Die folgende ungewöhnliche Abart – auf die ich zuerst von Howard Delong aus West Hartford, Connecticut, aufmerksam gemacht wurde – ist meines Wissens noch niemals gedruckt worden, bevor sie in „Scientific American" erschien.

Man steht vor drei Männern. Einer beantwortet Fragen immer wahrheitsgetreu, einer antwortet immer mit Lügen und einer gibt seine Antworten aufs Geratewohl – manchmal lügt er, manchmal nicht. Man selbst weiß nicht, welcher Mann wie antwortet; die drei Männer selbst wissen dies jedoch. Wie kann man durch drei Fragen alle drei Männer identifizieren? Jede Frage kann an irgendeinen der drei Männer gerichtet werden; jede Frage muß entweder durch „Ja" oder „Nein" zu beantworten sein.

5 Das Zahnrad-Paradoxon

Die technische Vorrichtung, die im Bild 138 gezeigt wird, wurde von James Ferguson, einem schottischen Astronomen des 18. Jahrhunderts, konstruiert. Er war zu seiner Zeit als populärer Lehrer, Autor und Erfinder wohlbekannt. Weiterhin kannte man ihn auf Grund der Tatsache, daß – obwohl er Mitglied der Royal Society war – seine Schulbildung nur aus drei Monaten Mittelschule bestanden hatte. (Eine seiner Biographien trägt den Titel: "The Story of the Peasent-Boy Philosopher".) Seine Vorrichtung wird hier als Problem aufgegeben; nachdem man es gelöst hat, erkennt man, daß es ein äußerst seltsames Paradoxon ist.

Das Rad *A* und seine Achse sind fixiert, so daß sich Rad *A* nicht drehen kann. Wird die Vorrichtung mit Hilfe des Handgriffes im Uhrzeigersinn um das Rad *A* gedreht, so

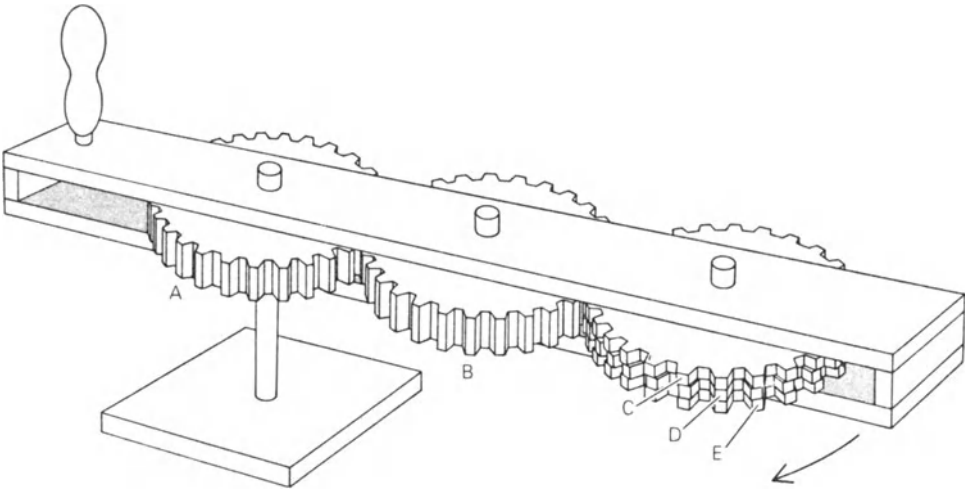


Bild 138 James Fergusons Zahnrad-Paradoxon

wird sich Rad *B* natürlich in dieselbe Richtung drehen. Die Zähne von *B* greifen in die Zähne der drei dünnen Räder *C*, *D* und *E* ein, die sich alle drei unabhängig voneinander drehen können. *A*, *B* und *E* haben je 30 Zähne, *C* hat 29 Zähne, *D* hat 31 Zähne. Alle Räder haben denselben Durchmesser.

Schaut jemand auf die Vorrichtung hinunter, während sie im Uhrzeigersinn gedreht wird, so müssen sich die dünnen Räder *C*, *D* und *E* auf ihren Achsen entweder im Uhrzeigersinn, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn oder gar nicht drehen (bezüglich des Betrachters). Ohne ein Modell zu bauen, gebe man die Drehrichtung jedes der Räder an. Will der Leser schließlich doch ein Modell bauen, so ist es nicht nötig, daß die Räder die genaue Anzahl von Zähnen haben. Es ist nur nötig, daß *A* und *E* dieselbe Anzahl von Zähnen haben, *C* mindestens um einen weniger und *D* mindestens um einen mehr.

6 Ein Spiel mit Grashalmen

Laut einem unlängst erschienenen Buch zweier russischer Mathematiker war in ländlichen Gegenden der UDSSR früher folgende Wahrsagemethode beliebt: Ein Mädchen hält sechs lange Grashalme in der Faust, so daß die Enden oben und unten hervorstehen. Ein zweites Mädchen bindet dreimal jeweils zwei der oberen Enden zusammen, wobei sie die Paare beliebig auswählt. Danach führt sie dasselbe mit den unteren Enden aus. Ergibt dies einen großen Ring, so wird damit angezeigt, daß das zweite Mädchen innerhalb eines Jahres heiraten wird.

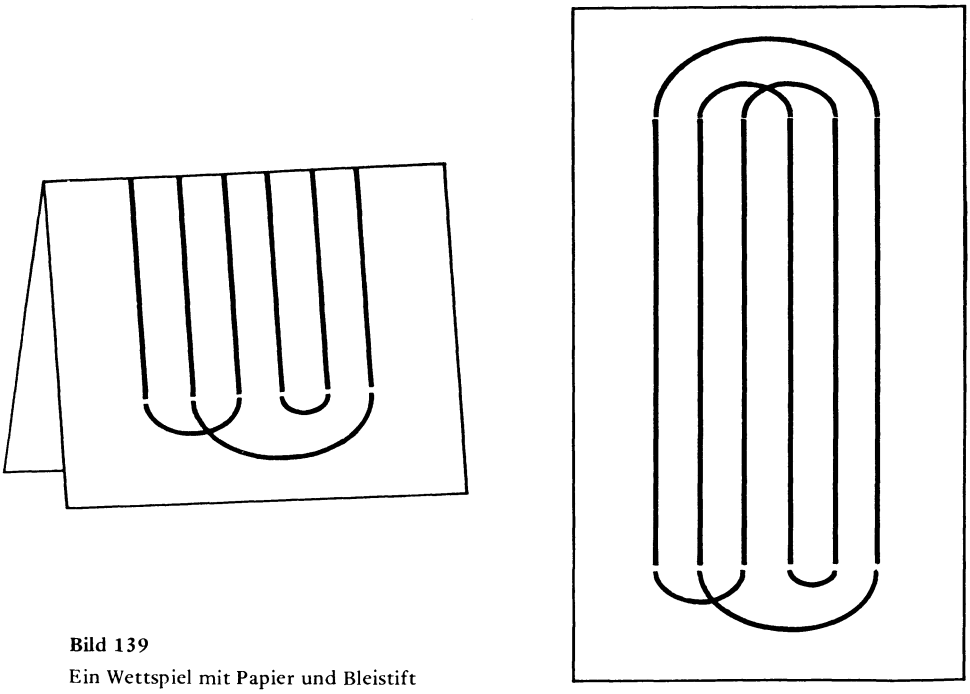


Bild 139
Ein Wettspiel mit Papier und Bleistift

Ein Wettspiel (eine amüsante Art, zu entscheiden, wer die Zeche zu bezahlen hat) mit Papier und Bleistift kann auf dieser Methode aufgebaut werden. Man zeichne auf ein Blatt Papier sechs vertikale Striche. Der erste Spieler verbindet auf beliebige Weise paarweise die oberen Enden der Striche und faltet dann das obere Blattende nach hinten, um die Verbindungslinien vor seinem Gegenspieler zu verbergen. Der zweite Spieler verbindet nun paarweise die unteren Enden, z. B. wie im Bild 139 links gezeigt wird. Das Blatt wird anschließend auseinandergefaltet, um nachzusehen, ob der zweite Spieler gewonnen hat, indem er eine große geschlossene Schleife erzeugt hat. (Die Darstellung im Bild 139 rechts zeigt einen solchen „Sieg".) Wer wird durch dieses Spiel begünstigt und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ihn, zu gewinnen?

7 Casey als Schlagmann

Bei einem Baseballspiel in Mudville war Casey der erste Schläger für Mudville. Während der neun Spielabschnitte fanden unter den neun Mudville-Spielern weder Stellvertretungen noch Wechsel in der Schlagordnung statt. Es ergab sich, daß Casey in jedem Spielabschnitt zum Schlagen kam. Wie groß ist die kleinste Anzahl von Läufen, die Mudville erzielt haben könnte? Dieses amüsante Problem wurde von Charles Vanden Eynden von der University of Arizona erdacht.

8 Ein Puzzle mit acht Klötzen

Sam Loyds wohlbekanntes 14-15-Puzzle wurde im Kapitel über Puzzles mit verschiebbaren Klötzen in diesem Buch erwähnt. Für alle Puzzles von diesem Typ, bei denen Einheitsquadrate auf Grund eines „Loches" innerhalb eines Rechtecks umhergeschoben werden können, gibt es eine schnelle Paritätskontrolle, um festzustellen, ob ein Muster aus einem anderen erhalten werden kann. Kann zum Beispiel auf dem einfachsten, nichttrivialen quadratischen Feld im Bild 140 das Muster links (mit den Klötzen in fallender Reihenfolge) in das Muster rechts überführt werden? Zur Beantwortung wechselt man Paare von Zahlen aus (indem man Klötze entfernt und dann wieder hinlegt), bis man das gewünschte Muster erhält; dabei zählt man die Anzahl der nötigen Vertauschungen. Dies kann in einem beliebigen Durcheinander erfolgen, ohne auf Effizienz zu achten. Ist die Anzahl der Vertauschungen gerade (wie es in diesem Fall immer sein wird), so ist die Überführung durch Verschiebungen möglich, sonst nicht.

Aber wie groß ist die kleinstmögliche Anzahl von Verschiebungen, um diesen Wechsel durchzuführen? Überraschend wenig wurde bis jetzt bezüglich solcher Methoden zur Minimalisierung von Lösungen erarbeitet. Für das hier angeführte Problem – die Umkehrung der Reihenfolge der Ziffern – sind mindestens 26 Züge notwendig. Legt nämlich jedes Quadrat den kürzesten Weg zu seinem Endplatz zurück, so erfordert dies 16 Züge. Aber 4 und 5 liegen nebeneinander und es sind mindestens vier Züge zur Vertauschung nötig; dasselbe gilt für 3 und 6. Dies hebt die untere Grenze auf 20 an. Zwei Züge werden durch die Eröffnungszüge von 1 oder 3 verloren, zwei weitere durch die letzten Züge

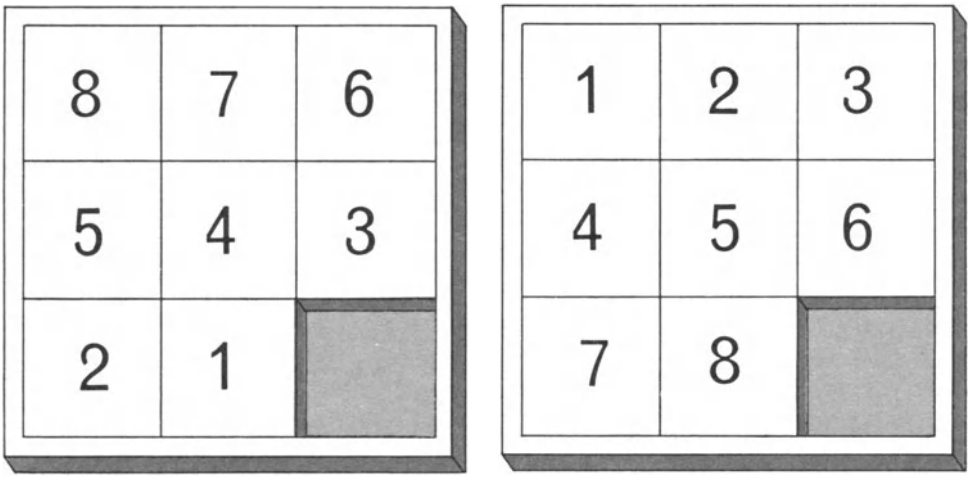


Bild 140 Man führe das linke Muster in das rechte über

von 8 oder 6, denn in jedem Fall muß ein Quadrat einen Platz einnehmen, der außerhalb seines kürzesten Weges liegt. Dies hebt die untere Grenze auf 24 an. Fertigt man schließlich einen Entscheidungsbaum für die Öffnungslinien des Spiels an, so gehen offensichtlich zwei weitere Züge beim neunten Zug verloren. Das Puzzle kann daher in nicht weniger als 26 Zügen gelöst werden. Da das Loch in seine Ausgangslage zurückkehrt, kann gezeigt werden, daß jede Lösung eine gerade Anzahl von Zügen haben wird.

Die beste bekannte Lösung (es ist dies die Lösung des Problems 253 in Henry Ernest Dudeneys posthumer Sammlung „Puzzles and Curious Problems") erfordert 36 Züge. Gibt man die Reihenfolge, in der die Stücke bewegt werden, als Kette von Ziffern an, so erfolgt die Lösung folgendermaßen: 12543 12376 12376 12375 48123 65765 84785 6. Aus gutem Grund glaube ich jedoch, daß es in weniger Zügen getan werden kann.

Um sich mit dem Problem zu befassen, kann man kleine Kartonquadrate mit den Ziffern von 1 bis 8 auf einem auf Papier gezeichneten Feld verschieben; oder man arbeitet mit neun Spielkarten auf einem rechteckigen Feld. Ich wäre dankbar, wenn Leser, die eine bessere Lösung als Dudeney finden, diese an mich senden würden.

Lösungen

1. Sieben ist die kleinste Anzahl von Äpfeln (wir schließen „negative Äpfel" aus), die die Bedingungen in Coleridges Problem erfüllt.
2. Um die Hose eines Mannes, dessen Fußgelenke mit einem Strick verbunden sind, zu wenden, schiebe man die Hose zuerst auf den Strick hinunter, dann schiebe man ein Hosenbein durch das andere durch. Das äußere Hosenbein wird dabei zweimal

gewendet, so daß die Hose wieder mit der Außenseite nach außen am Strick bleibt, die Hosenbeine sind allerdings vertauscht und zeigen in Richtung der Füße des Mannes. Nun greife man von der Hüftseite her in die Hose und drehe bei beiden Beinen das Innere nach außen. Die Hose hängt nun gewendet am Seil und ist in einer Stellung, daß sie dem Mann wieder angezogen werden kann; der Reißverschluß ist dabei wie ursprünglich vorne, nur die Hosenbeine sind vertauscht.

3. Um die topologischen Eigenschaften eines Netzes mit einem ungewöhnlichen Muster zu analysieren, ist es manchmal nützlich, das Netz in ein dazu topologisch äquivalentes zu überführen, das die Regelmäßigkeiten des Netzes besser enthüllt. Das Muster des Pfennig-Mark-Spieles (im Bild 141 oben) ist offensichtlich äquivalent dem im Bild 141 unten. Bewegt sich der Pfennig direkt auf die Mark zu, so kann er sie nicht einfangen, da die Mark immer in „Gegenläufigkeit" – wie man dies bei Schach und Dame nennt – ist. Die Bedeutung dieses Ausdrucks wird durch die Färbung jedes zweiten Punktes im Bild 141 hervorgehoben. Solange beide Münzen das Dreieck ganz oben meiden, wird ein Zug der Mark sie immer auf ein Feld bringen, das dieselbe Farbe wie das vom Pfennig besetzte aufweist; daher kann der Pfennig die Mark im nächsten Zug nie einfangen. Um diese Gegenläufigkeit zu verlassen, muß der Pfennig einmal den langen äußeren Bogen entlang, der die Punkte 1 und 3 verbindet. Da dies die relative Parität der beiden Stücke ändert, ist es dann für den Pfennig eine einfache Angelegenheit, die Mark in die Enge zu treiben.
„Übersetzt" man dies in das ursprüngliche Muster zurück, so ist die beste Strategie für den Pfennig, entweder zuerst nach 1 und dann den ganzen äußeren Kreis herum nach 3 oder zuerst nach 3 und dann herum nach 1 zu fahren. In beiden Fällen hat der Pfennig dann keine Mühe, die Mark vor dem siebenten Zug im Punkt 6, 9 oder 15 einzufangen.

4. Man nenne die Männer A, B und C. Weiterhin soll L für Lügner, W für den Mann, der immer die Wahrheit sagt und G für denjenigen, der seine Antworten aufs Geratewohl gibt (manchmal wahr, manchmal falsch), stehen. Die sechs möglichen Permutationen von W, L und G sind folgende:

	A	B	C
(1)	W	L	G
(2)	W	G	L
(3)	L	G	W
(4)	L	W	G
(5)	G	W	L
(6)	G	L	W.

Man frage A: „Ist es wahrscheinlicher, daß B eher die Wahrheit sagt als C?" Antwortet er mit „Ja", dann sind somit die Zeilen 1 und 4 eliminiert und man weiß, daß C nicht derjenige ist, der aufs Geratewohl antwortet. Antwortet er mit „Nein", dann sind dadurch die Zeilen 2 und 3 eliminiert und man weiß, daß B nicht derjenige ist, der aufs Geratewohl antwortet. In beiden Fällen wende man sich nun dem Mann zu, der nicht aufs Geratewohl antwortet und stelle ihm eine Frage, von

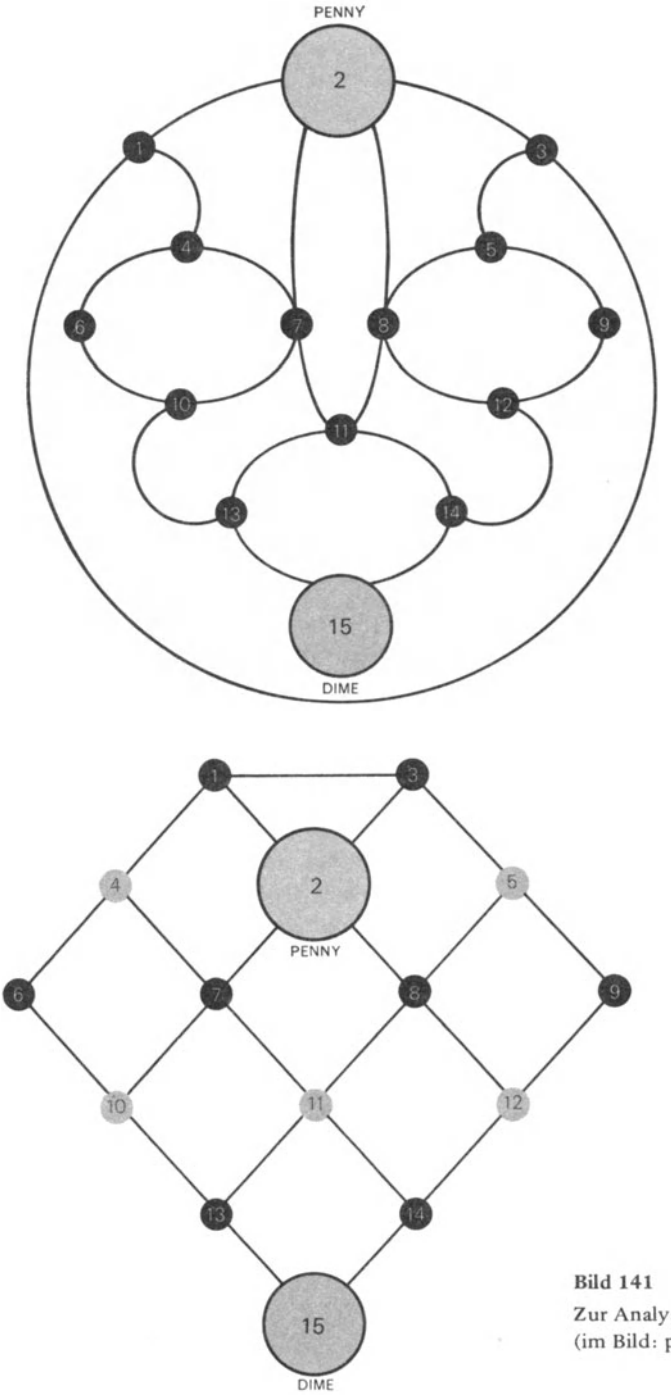


Bild 141
Zur Analyse des Pfennig-Mark-Spiels
(im Bild: penny=Pfennig; dime=Mark!!)

der sowohl er als man selbst die Antwort kennt. Zum Beispiel frage man: „Sind Sie der Mann, der aufs Geratewohl antwortet?" Seine Antwort ergibt nun, ob er der Lügner ist oder derjenige, der immer die Wahrheit sagt. Weiß man dies, so fragt man ihn, ob ein gewisser seiner Kollegen derjenige ist, der aufs Geratewohl antwortet. Seine Antwort legt nun die Identität der anderen beiden Männer fest.

Viele Leser haben andere Lösungen eingesandt. Die ungewöhnlichste stammt von Kenneth O'Thoole und wurde mir von Mary S. Bernstein übermittelt. Ein Mann wird gefragt: „Wenn ich jeden von Ihnen fragen würde, ob ich einen Hut aufhabe, und Ihre beiden Kollegen würden beide dieselbe Antwort geben, würde Ihre Antwort damit übereinstimmen?" Derjenige, der immer die Wahrheit sagt, sagt nein; der Lügner ja und derjenige, der aufs Geratewohl antwortet, bleibt die Antwort schuldig, da er weiß, daß seine beiden Kollegen nicht übereinstimmend antworten können. Hier stoßen wir auf eine gewisse Unklarheit, und zwar in dem Sinn, daß jede Antwort dieses Mannes eine Lüge wäre. Nimmt man jedoch an, daß er in diesem Fall nichts antwortet, so hat man die Frage nur zweien der drei Männer zu stellen, um alle drei zu identifizieren.

5. Wird James Fergusons kuriose Vorrichtung im Uhrzeigersinn gedreht, so dreht sich das Rad *C* bezüglich des Beobachters im Uhrzeigersinn, *D* gegen den Uhrzeigersinn und *E* dreht sich überhaupt nicht!

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Ring zu bilden, indem man zuerst die oberen Enden, anschließend die unteren Enden der sechs Grashalme rein zufällig paarweise verbindet? Unabhängig davon, wie die oberen Enden verbunden werden, können die Grashalme immer wie im Bild 142 angeordnet werden. Man braucht nun nur die Wahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, daß ein zufälliges paarweises Verbinden der unteren Enden einen Ring ergibt.

Wird das Ende von *A* mit dem Ende von *B* verbunden, so kann das Endergebnis kein großer Ring sein. Wird es jedoch mit *C, D, E* oder *F* verbunden, so bleibt diese Ringbildung möglich. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei der ersten Verbindung kein Mißgeschick passiert, ist also 4/5. Man nehme an, daß *A* mit *C* verbunden wird. *B* kann nun mit *D, E* oder *F* verbunden werden. Davon wäre nur *D* fatal. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß *B* mit *E* oder *F* verbunden wird, ist 2/3; in jedem dieser beiden Fälle muß das verbleibende Paar von Enden den großen Ring vollenden. Dasselbe würde sich ergeben, wenn *A* mit *D, E* oder *F* anstelle von *C* verbunden worden wäre. Die Wahrscheinlichkeit, den Ring zu vollenden, ist daher $(4/5) \cdot (2/3) = 8/15 = 0{,}53$. Daß die Wahrscheinlichkeit größer als 1/2 ist, kommt etwas überraschend. Somit hat in der Version mit Papier und Bleistift, die früher erklärt wurde, der zweite Spieler einen leichten Vorteil. Da die meisten Leute das Gegenteil annehmen, ist es ein hinterlistiges Spiel zu entscheiden, wer mit den Streifen beginnt. Natürlich gestattet man großzügig dem Partner den Anfang.

Man kann das Problem auf einfache Weise verallgemeinern. Für zwei Grashalme ist die Wahrscheinlichkeit (natürlich) 1, für vier Halme ist sie 2/3, für sechs $(2/3) \cdot (4/5)$ und für acht $(2/3) \cdot (4/5) \cdot (6/7)$. Für jedes zusätzliche Paar von Grashalmen kommt einfach ein weiterer Bruch dazu. Dieser ist leicht zu bestimmen, da die Zähler dieser Reihe die geraden Zahlen, die Nenner die ungeraden Zahlen sind! Bezüglich der Her-

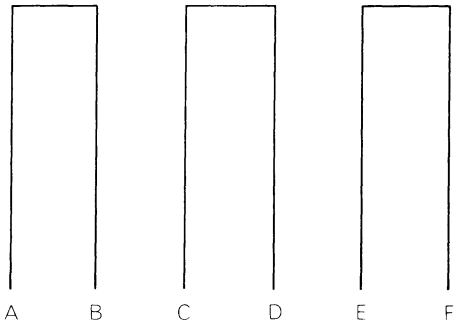


Bild 142
Das Grashalm-Problem

leitung dieser einfachen Formel sowie der Verwendung der Stirlingschen Formel für die Approximation der Wahrscheinlichkeit, wenn eine sehr große Anzahl von Brüchen multipliziert werden muß, vergleiche man „Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. I", von den russischen Zwillingsbrüdern A. M. und I. M. Yaglom. (Es ist das Problem Nr. 78 in der englischen Übersetzung von James McCawley Jr.; San Francisco: Holden-Day, 1964).

Waldean Schulz fügte in der Veröffentlichung „Brain Teasers and Information Theroy", die er für eine Philosophieklasse der Universität von Colorado – unter dem Lehrer David Hawkins – schrieb, dem Problem folgende Schwierigkeit hinzu: Man nehme an, man sei der zweite Spieler. Wie kann man die unteren Enden so verbinden, daß man durch eine einfache Ja-Nein-Frage, die der erste Spieler beantwortet, herausfindet, ob man gewonnen oder verloren hat?

Die Antwort ist: Man verbinde die beiden äußersten Striche, dann die nunmehr äussersten und schließlich die beiden mittleren Striche. Die Frage ist dann: Haben Sie die oberen Enden auf symmetrische Art und Weise verbunden? Eine positive Antwort bedeutet, daß man verloren hat, eine negative Antwort heißt, daß sich eine einzige Schleife ergeben und man gewonnen hat. Es ist überraschend, daß ein „Bit" Information ausreicht, um zwischen Sieg oder Niederlage unterscheiden zu können.

7. Das Mudville-Team könnte die geringe Anzahl von null Läufen erzielt haben, obwohl Casey, der erste Schläger, in jedem Spielabschnitt zum Schlagen kam. Im ersten Spielabschnitt laufen Casey und die nächsten zwei Schläger; die nächsten drei fallen aus. Im zweiten Abschnitt laufen wieder die ersten drei Männer, wodurch Casey wieder zum Schlagen kommt. Aber jeder Läufer wird vom Werfer abgefangen, so daß Casey zu Beginn des dritten Abschnittes wieder am Schlagmal steht. Dies wiederholt sich nun solange, bis das Spiel in Mudville ohne Freude endet, obwohl der große Casey nie ausfiel.

8. Das Puzzle mit verschiebbaren Klötzen kann in 30 Zügen gelöst werden. Ich habe gehofft, die Namen aller Leser, die eine 30-Zug-Lösung gefunden hatten, hier angeben zu können: aber immer mehr Briefe kamen, bis der verfügbare Platz für die vielen Namen bei weitem nicht mehr ausreichte. Insgesamt fanden die Leser zehn verschiedene 30-Zug-Lösungen. Sie sind im Bild 143 paarweise gezeigt, da – wie viele

1a. 34785 21743 74863 86521 47865 21478
1b. 12587 43125 87431 63152 65287 41256

2a. 34785 21785 21785 64385 64364 21458
2b. 14587 53653 41653 41287 41287 41256

3a. 34521 54354 78214 78638 62147 58658
3b. 14314 25873 16312 58712 54654 87456

4a. 34521 57643 57682 17684 35684 21456
4b. 34587 51346 51328 71324 65324 87456

5a. 12587 48528 31825 74316 31257 41258
5b. 14785 24786 38652 47186 17415 21478

Bild 143
Minimallösungen für das Puzzle mit verschiebbaren Klötzen

Leser hervorhoben – jede Lösung eine Inverse hat, indem man für jede Ziffer ihre Differenz auf 9 substitutiert und die Ziffern dann in umgekehrter Reihenfolge anordnet. Man beachte, daß von den vier möglichen Zwei-Zug-Eröffnungen nur 3, 6 nicht zu einer Minimallösung führt. Es zeigte sich, daß die Lösungen 2a und 3b am leichtesten zu finden waren. Die am schwersten zu erfassende Lösung 5a wurde nur von zehn Lesern gefunden. Nur zwei Leser, H. L. Fry und George E. Raynor, fanden alle zehn Lösungen, ohne einen Computer zu benützen.

Donald Michie von der University of Edinburgh hat dieses Acht-Klotz-Puzzle in seiner Arbeit über "game-learning"-Maschinen verwendet. Sein Kollege Peter Schofield vom Computerzentrum der Universität hatte ein Programm geschrieben, das Minimallösungen für alle 20160 Muster bestimmt, die mit dem Loch in der Mitte beginnen und enden. (60 von diesen Mustern erfordern 30 Züge, das Maximum für diese Probleme mit dem Loch in der Mitte.) Mit Hilfe seines Programms fand Schofield alle zehn Lösungen, doch schloß dies nicht die Möglichkeit weiterer – sogar kürzerer – Lösungen aus. Als erstem gelang es William F. Dempster, einem Computerprogrammierer, die Angelegenheit zu einem Ende zu führen. (Lawrence Radiation Laboratory of the University of California at Berkeley; mit einem Programm für eine IBM 7094). Dieses Programm lief zuerst alle Lösungen mit 30 oder weniger Zügen durch und druckte die zehn Lösungen in 2 1/2 Minuten aus. Ein zweiter Lauf – um alle Lösungen mit 34 oder weniger Zügen zu bestimmen – nahm 15 Minuten in Anspruch. Er ergab 112 Lösungen mit 32 Zügen und 512 Lösungen mit 34 Zügen. Es gibt also 634 Lösungen, die der von Henry Ernest Dudeney angegebenen Lösung mit 36 Zügen überlegen sind. Die 30-Zug-Lösungen wurden später durch über ein Dutzend weiterer Computerprogramme bestätigt. Noch nicht bekannt ist, ob es Start- und Endmuster mit dem Loch an der Ecke oder auf der Seite gibt, die mehr als 30 Züge erfordern.

20 Das Gitter der ganzen Zahlen

Das einfachste aller Gitter in der Ebene – indem man das Wort „Gitter" in seinem kristallographischen Sinn versteht – ist eine Menge von Punkten in quadratischer Anordnung. Dies wird oft das „Gitter der ganzen Zahlen" genannt; denn denkt man an die Ebene als kartesisches Koordinatensystem, so ist dieses Gitter einfach die Menge aller Punkte der Ebene, deren x- und y-Koordinaten ganze Zahlen sind. Bild 144 zeigt einen endlichen Teil dieser Menge: die 441 Punkte, deren Koordinaten von 0 bis 20 reichen.

Man denke sich den Punkt (0,0) als die südwestliche Ecke eines quadratischen Obstgartens, der an der Süd- und Westseite eingezäunt ist, nach Norden und Osten aber unendliche Ausdehnung besitzt. In jedem Gitterpunkt stehe ein Baum. Steht man am Punkt (0,0) und späht in den Garten hinein, so werden manche Bäume sichtbar, andere werden hinter näherstehenden Bäumen versteckt sein. Hier bricht unser Vergleich natürlich zusammen, denn die Bäume müssen als Punkte angenommen werden und wir vereinbaren, daß irgend ein Baum von (0,0) aus „sichtbar" ist, falls eine Gerade von (0,0) zum Baum hin durch keinen anderen Punkt läuft. Die gefärbten Punkte markieren alle von (0,0) aus sichtbaren Gitterpunkte; die nicht markierten Schnittpunkte repräsentieren die nicht sichtbaren Punkte.

Identifizieren wir jeden Punkt mit einem Bruch, dessen Zähler die y-Koordinate und dessen Nenner die x-Koordinate des Punktes ist, so ergeben sich viele interessante Eigenschaften des Gitters. (Meine Aufmerksamkeit wurde zuerst von Robert B. Ely aus Philadelphia auf diese Eigenschaften gelenkt.) Zum Beispiel entspricht jedem sichtbaren Punkt ein Bruch, dessen Zähler und Nenner teilerfremd sind, d. h., sie besitzen keinen gemeinsamen Teiler außer 1 und können daher nicht auf eine einfachere Form reduziert werden. Jeder unsichtbare Punkt entspricht einem Bruch, der vereinfacht werden *kann* – und jede Vereinfachung entspricht einem Punkt, der auf der Verbindungsgeraden von (0,0) mit dem unsichtbaren Punkt liegt. Man betrachte den Punkt 6/9 ($y = 6, x = 9$). Er ist von (0,0) aus nicht sichtbar, denn er kann auf 2/3 vereinfacht werden. Legt man ein Lineal von 0,0 nach 6/9, so erkennt man, daß die Möglichkeit, 6/9 zu sehen durch den Punkt 2/3 blockiert wird. Alle Punkte der beiden Diagonalen, die von den Punkten 0/1 und 1/0 nach rechts oben gezogen werden, sind sichtbar – denn kein Bruch, dessen Zähler und Nenner sich um 1 unterscheiden, kann vereinfacht werden.

Man beachte, daß viele der dazu quer laufenden Diagonalen – von links oben nach rechts unten – mit Ausnahme ihrer Endpunkte völlig aus sichtbaren Punkten bestehen. Ely hebt hervor, daß alle diese Diagonalen die Koordinatenachsen bei einer Primzahl schneiden. Jeder sichtbare Punkt entlang einer solchen Diagonalen ist ein Bruch, der aus zwei Zahlen besteht, die als Summe die Primzahl ergeben, die durch das Ende der Diagonale angezeigt wird. Zwei Zahlen, die als Summe eine Primzahl ergeben, müssen offensichtlich teilerfremd sein (hätten sie einen gemeinsamen Teiler, dann würde dieser auch die Summe ohne Rest teilen), daher können solche Brüche nicht vereinfacht werden. Verti-

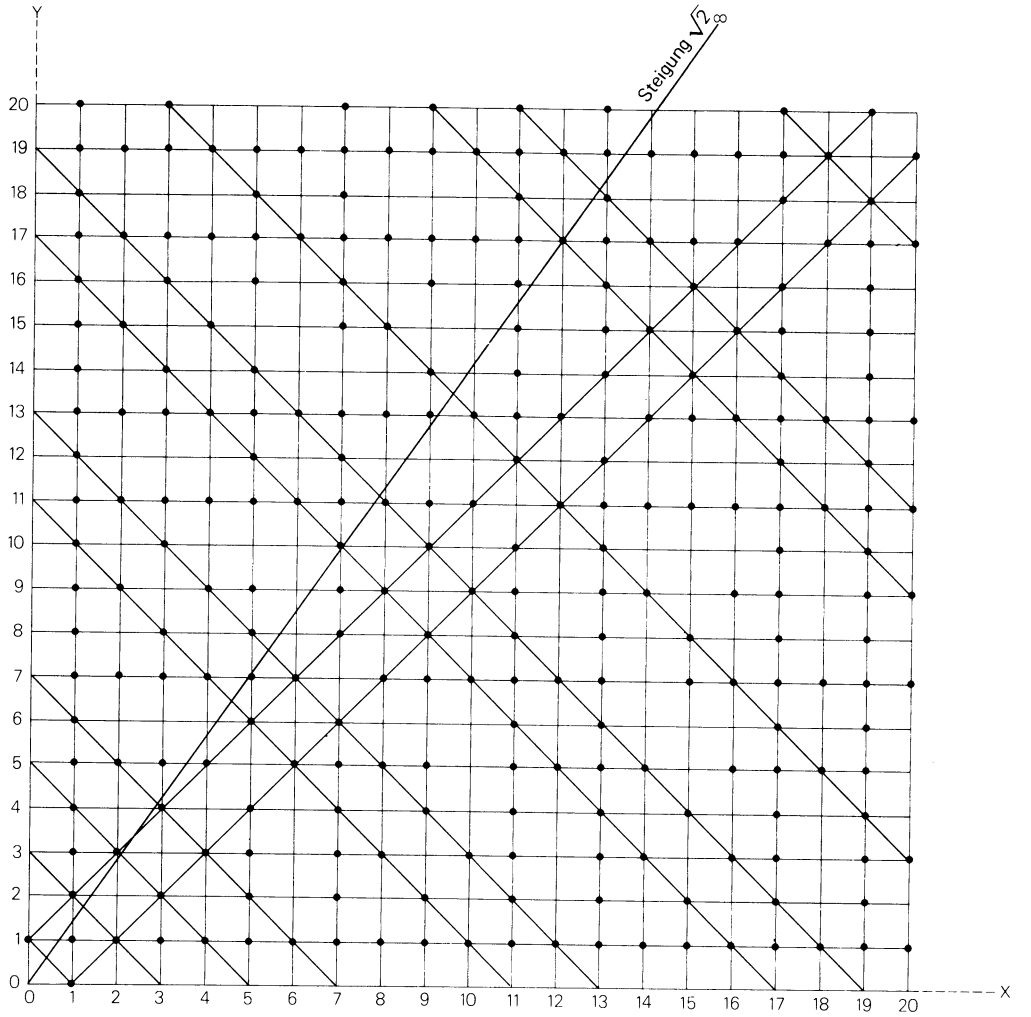


Bild 144 Der unendlich große Obstgarten und die Punkte, die am Gitter der ganzen Zahlen von (0,0) aus sichtbar sind

kale und horizontale Geraden, die die Achsen bei einer Primzahl schneiden, werden mit größer werdenden Primzahlen immer dichter mit sichtbaren Punkten besetzt; denn solche Geraden haben unsichtbare Gitterpunkte nur dort, wo die andere Koordinate ein Vielfaches der Primzahl ist.

Ist es möglich, am Punkt (0,0) zu stehen und entlang einer Geraden in diesen unendlich großen Obstgarten hineinzublicken, welche nie – selbst wenn sie bis ins Unendliche verlängert wird – auf einen Baum trifft? Ja; Es gibt nicht nur unendlich viele solche Geraden, sondern es gibt sogar unendlich viel mehr von ihnen als es Geraden gibt, die auf Bäume treffen! Wird also die Richtung einer „Sichtgeraden" durch Zufall bestimmt, so ist die Wahrscheinlichkeit, auf ihr einen Baum zu treffen, praktisch null. Wie kann man eine solche Gerade definieren: Man muß sie einfach mit solcher Steigung zeichnen, daß jeder Punkt entlang dieser Geraden Koordinaten hat, die miteinander inkommensurabel sind; mit anderen Worten so, daß der Bruch y/x – dies ist gleich der Wert des Tangens des zwischen der Geraden und der x-Achse eingeschlossenen Winkels – für jeden Punkt irrational ist. Zum Beispiel geht man entlang der x-Achse um 10 nach rechts und dann hinauf bis zu einem Punkt mit der y-Koordinate 10 mal π. Verbindet man diesen Punkt mit (0,0), so erzeugt man eine Gerade, die niemals – wie weit sie auch verlängert wird – einen Punkt treffen kann; denn $10\,\pi/10$ ist π, eine irrationale Zahl. (Man müßte sehr fein zeichnen und ein sehr leistungsfähiges Mikroskop benützen, um festzustellen, wie weit die Gerade am Punkt 355/113 vorbeiläuft. Dieser Bruch stellt π auf sechs Dezimalstellen genau dar!)

Die besonders gekennzeichnete Gerade im Bild 144 hat die Steigung $\sqrt{2}$. Es ist leicht zu beweisen, daß ein Geschoß, das entlang dieser Geraden bis ins Unendliche fliegt, keinen Baum treffen kann. Das rechtwinkelige Dreieck im Bild 145 hat die Ba-

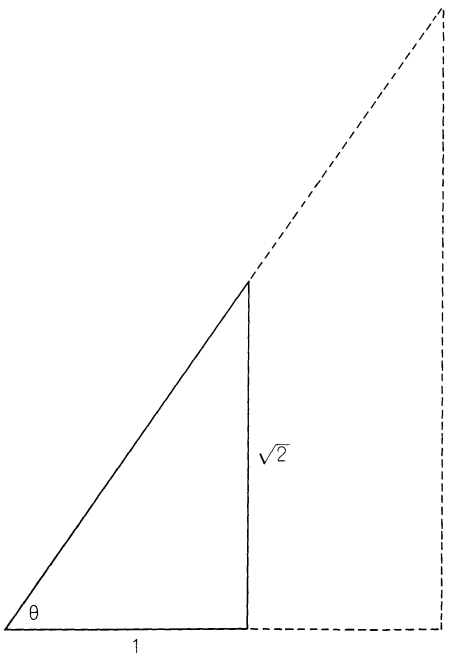


Bild 145
Der Tangens des Winkels θ ist $\sqrt{2}$

sis 1 und die Höhe $\sqrt{2}$, so daß der Tangens des Winkels θ gleich $\sqrt{2}$ ist. Verlängert man die Hypotenuse – wie durch die gestrichelte Linie angedeutet – um irgendein größeres rechtwinkeliges Dreieck auf der verlängerten Basislinie zu formen, so werden Höhe und Basis des größeren Dreiecks dasselbe irrationale Verhältnis haben. Die Basen und Höhen aller solcher Dreiecke entsprechen den beiden Koordinaten der Geraden mit der Steigung $\sqrt{2}$. Daher werden die Koordinaten irgendeines Punktes auf dieser Geraden – so weit sie auch in das Gitter der ganzen Zahlen hinein verlängert wird – immer denselben irrationalen Bruch ergeben. Jeder Gitterpunkt jedoch stellt einen *rationalen* Bruch dar; daher kann kein Gitterpunkt auf der Geraden liegen.

Man beachte aber, daß man auf der Suche nach knappen „Fehlschüssen" Brüche finden kann, die sehr gute Näherungen für die irrationale Steigung sind. Man stelle sich die $\sqrt{2}$-Gerade als ein im Unendlichen befestigtes, gespanntes Seil dar. Hält man das eine Ende im Punkt (0,0) und bewegt das Seil nach Osten, so wird es gegen Bäume gepreßt, deren Brüche kleiner als $\sqrt{2}$, d.h. 1,414 213 6... sind, die aber immer näher an $\sqrt{2}$ herankommen, je mehr man sich von (0,0) wegbewegt. Der erste Baum, den es berührt, wird 1/1 sein, d.h. 1, eine schlechte Näherung. Der nächste ist 4/3, ein wenig besser; der nächste ist 7/5, d.h. 1,4, was schon ganz gut ist. Bewegt man das Seilende in ähnlicher Weise nach Norden, so preßt es sich gegen Brüche größer als 1,414 213 6..., aber der Überschuß nähert sich 0, wenn man sich nach Unendlich bewegt. Der erste Bruch ist 2/1, d.h. 2, ist also nicht sehr gut; 3/2 ist besser, 10/7 noch besser und 17/12, d.h. 1,41666... verfehlt $\sqrt{2}$ nur um 0,0024.

Eine der einfachsten Methoden, um $\sqrt{2}$ auszudrücken, ist die Methode der unendlichen Kettenbrüche

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 1}}}$$

$$\vdots$$

Wenn man oben beginnt und die Teilsummen ermittelt (d.h. 1, 1 + 1/2, 1 + 1/3 usw.), so erhält man genau die oben erwähnten Brüche: 1, 3/2, 4/3, 7/5, 10/7, 17/12. Sie nähern sich immer mehr $\sqrt{2}$, so wie ihre Gitterpunkte der Geraden immer näher kommen.

Die Diskussion irrationaler Zahlen suggeriert das folgende Problem: Die Koordinaten eines Punktes seien $y = \sqrt{27}$, $x = \sqrt{3}$. Schneidet die unendliche Gerade durch den Ursprung und diesen Punkt irgendeinen anderen Punkt als (0,0)?

Wird ein im Punkt (0,0) liegender Billardball so gestoßen, daß er die Hauptdiagonale unter 45 Grad hinaufläuft, so wird er natürlich für alle Zeiten so fortrollen und dabei nur durch Gitterpunkte laufen, deren Brüche sich auf 1 reduzieren (dem Tangens von 45 Grad). Man nehme nun an, daß das Gitter auf Rechtecke von beliebiger Größe beschränkt wird, vorausgesetzt, Höhen und Breiten der Rechtecke sind ganzzahlig; weiterhin nehme man

an, daß der Ball von allen Seiten zurückprallt und ohne Reibung über diesen mit dem Gitter versehenen Billardtisch rollt. Mit Hilfe einer in „Mathematical Snapshots" von Hugo Steinhaus geschilderten Reflexionstechnik ist es nicht schwer zu zeigen, daß der Ball – welche Abmessungen das Rechteck auch immer hat – nach einer endlichen Anzahl von Ablenkungen auf eine der drei anderen Ecken des Tisches treffen wird.

Diese Aussage kann noch verschärft werden. Trifft der Ball – unabhängig vom Winkel des ersten Schusses – die erste Bande in einem Punkt mit einer rationalen Entfernung von einer Ecke, so wird er schließlich eine der Ecken des Tisches treffen. Trifft er aber die erste Bande in einem irrationalen Punkt, so erfolgt jeder Rückprall unter einem Winkel mit irrationalem Tangenswert, und der Weg wird niemals einen Gitterpunkt berühren. Da die Ecken Gitterpunkte sind, wird der Ball niemals auf eine Ecke treffen. Auf einer Geraden sind unendlich viel mehr irrationale Punkte als rationale. Wird ein idealer Ball (man hat sich den Ball als Punkt vorzustellen) von der Ecke aus unter einem willkürlichen Winkel losgeschossen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die erste Bande in einem rationalen Punkt trifft, unendlich nahe bei Null. Stellt man sich den Tisch mit einem feinen Netz von Gitterpunkten bedeckt vor – Milliarden davon, alle mit rationalen Koordinaten – so wird der auf willkürliche Weise losgeschossene Ball für alle Zeiten über den Tisch laufen, keinen Weg zweimal zurücklegen und niemals auch nur einen Gitterpunkt berühren.

Hier beschäftigen wir uns nur mit dem einfacheren Fall, daß der Ball entlang Diagonalen rollt, die mit den Tischseiten Winkel von 45 Grad einschließen. Dabei ergibt sich sogleich eine interessante Frage (die zuerst von Joseph Becker aus Milwaukee an mich gesandt wurde). Sind die Abmessungen des Tisches bekannt, wie kann man vorhersagen, welche der drei Ecken der Ball treffen wird? Man kann immer ein Schaubild zeichnen und so die Ecke ermitteln. Wenn aber der Tisch beispielsweise eine Breite von 10175 Einheiten und eine Länge von 11303 Einheiten hat, so wäre die zeichnerische Ermittlung der Lösung recht ermüdend.

Becker hebt hervor, daß ein geschickter Paritätstest eine einfache Regel zur Bestimmung der Ecke liefert, die der Ball trifft, falls zumindest eine der Tischseiten ungerade ist. Man nehme an, beide Seiten sind ungerade. Man kennzeichnet den Punkt (0,0) und jeden zweiten Gitterpunkt (Bild 146a). Offensichtlich wird der Ball nur durch die gekennzeichneten Gitterpunkte rollen. Von den drei möglichen Ecken ist nur die nordöstliche markiert, d. h., auf diese muß der Ball treffen. (Der Leser kann dies selbst bestätigen, indem er den Weg des Balles durch die gekennzeichneten Punkte fortsetzt.) Ist eine Seite des Tisches gerade, die andere ungerade, so zeigt sich mit Hilfe derselben Paritätskennzeichnung (Bilder 146b und c), daß der Ball auf die dem Ursprung benachbarte Ecke treffen muß, die an der geraden Tischseite liegt.

Sind beide Tischseiten gerade, so ergeben sich unvorhergesehene Schwierigkeiten: *Alle vier* Ecken sind markiert (Bild 146d). Welche der drei möglichen Ecken wird der Ball treffen? Experimentiert man ein wenig auf kariertem Papier, so zeigt es sich, daß auf verschiedenen gerade-gerade-Tischen alle drei erreicht werden können. Kann der Leser eine arithmetische Regel angeben, die für jeden beliebigen Tisch mit geraden Seiten eine schnelle Bestimmung der Ecke gestattet, auf welche der Ball treffen wird?

Ein Hinweis zur Lösung des Problems liegt in der seltsamen Tatsache, daß derjenige Punkt, der erstens an der langen Tischseite, zweitens auf dem Weg des Balles und drittens

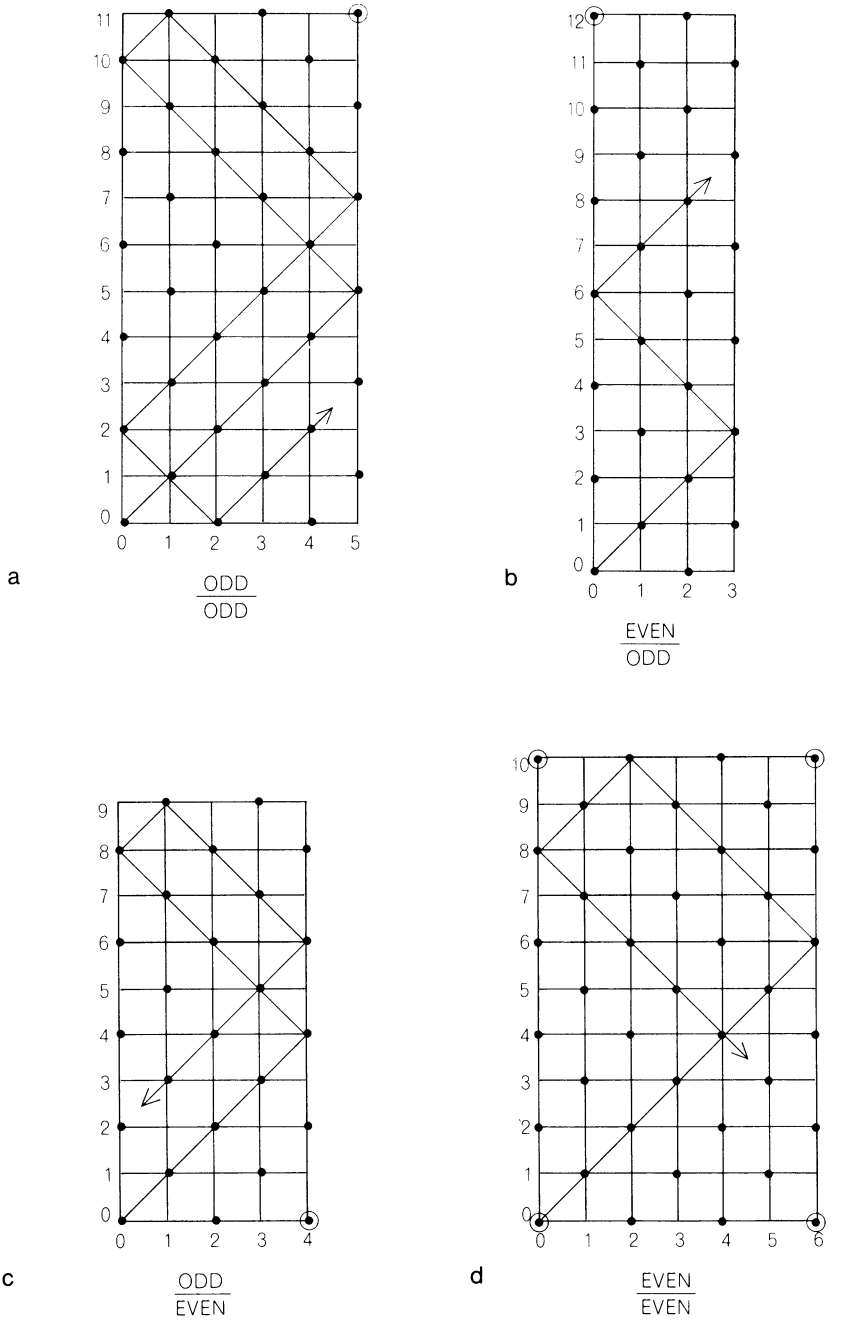


Bild 146 Paritätskontrollen durch Kennzeichnung für die Wege von Billardbällen

am nächsten dem Ursprung liegt immer genau zweimal dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) der zwei Seiten ist. Sind die beiden Seiten teilerfremd, dann ist der ggT natürlich 1. Dies ist für die Bilder 146a und c der Fall. Man sieht, daß der Punkt an der langen Seite, der am nächsten dem Punkt (0,0) ist und der am Weg des Balles liegt, 2 ist, d. h. zweimal dem ggT.

Diese Eigenschaft der 45-Grad-Wege eines elastischen Balles innerhalb eines rechteckigen Gitters der ganzen Zahlen inspirierte Andres Zavrotsky von der University of the Andes in Venezuela zum Bau einer optischen Vorrichtung, um den größten gemeinsamen Teiler von zwei ganzen Zahlen zu finden. Eine Skizze seiner Erfindung (U. S. Patent 2 978 816, 11. April 1961) wird im Bild 147 gezeigt. Vier Spiegel mit ganzzahligen Skalen

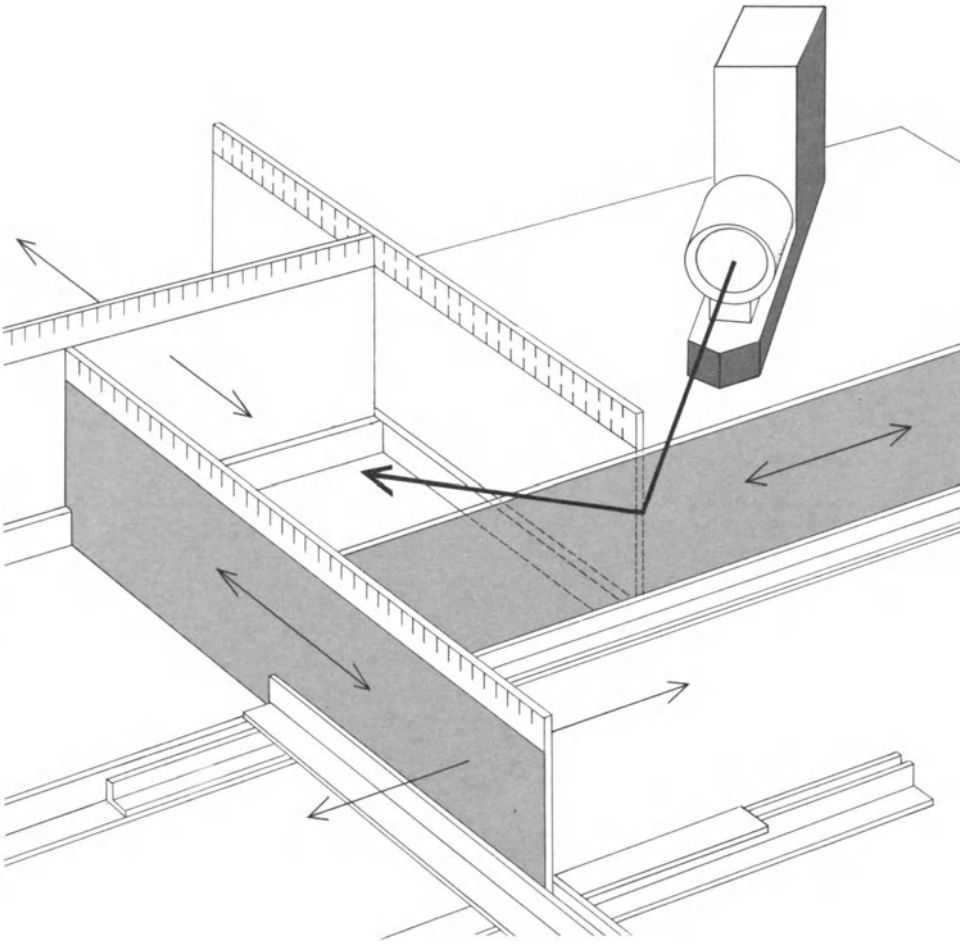


Bild 147 Zavrotskys Vorrichtung zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers

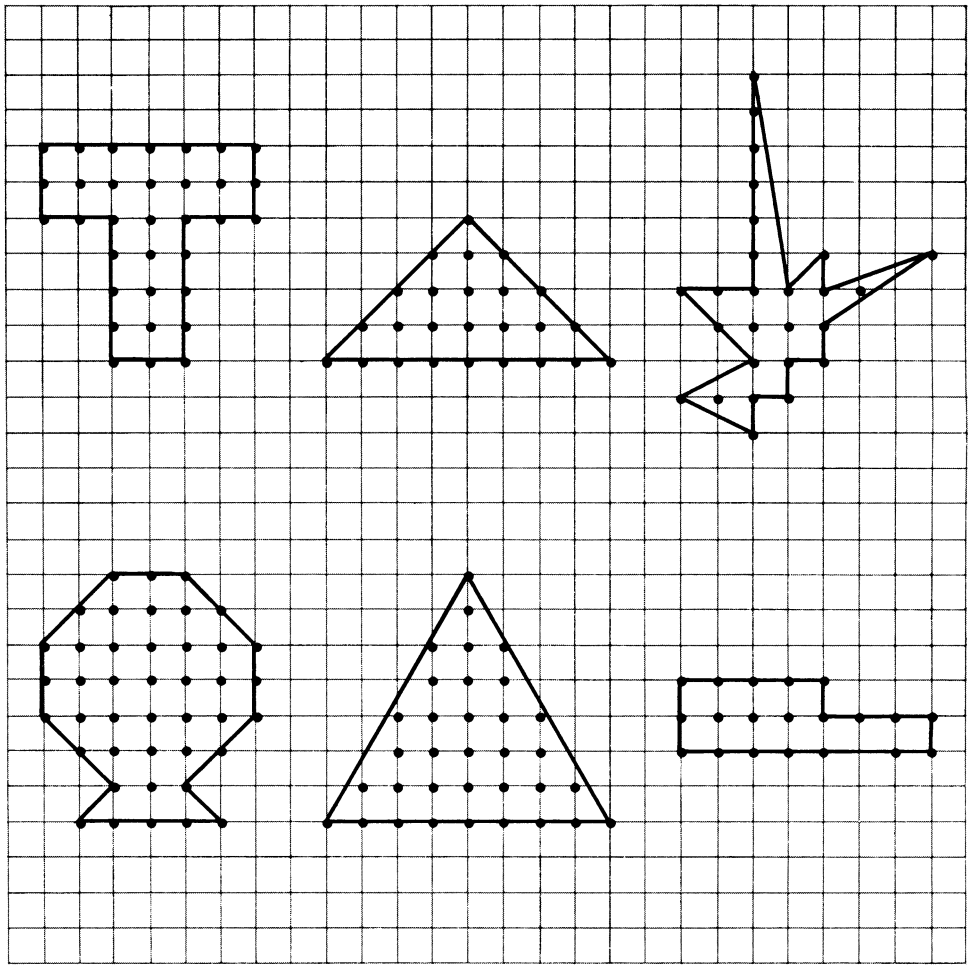


Bild 148 Man ermittle die Flächen dieser „Gitter-Polygone"

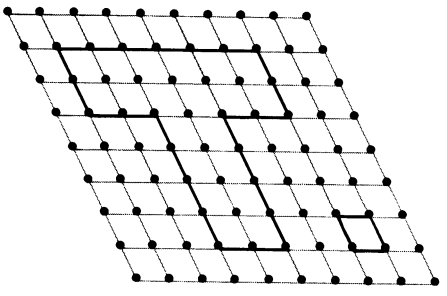


Bild 149
"Affine" Transformation eines Gitter-Polygons

an ihren Seiten können so justiert werden, daß sie ein Rechteck bilden, dessen Seitenlängen gleich dem zu untersuchenden Zahlenpaar sind. Ein Lichtstrahl wird, wie abgebildet, durch einen Spalt an einer Ecke eingelassen. Er wird an der Ecke unter einem Winkel von 45 Grad gespiegelt (diese Ecke stellt den Nullpunkt der beiden Skalen dar) und läuft von Spiegel zu Spiegel, bis sein Weg in einer der drei anderen Ecken endet. Die beleuchtete Stelle an der Längsseite des Rechtecks, die dem Ursprung der von Zavrotsky „Optisches Billard" genannten Vorrichtung am nächsten ist, ist zweimal dem ggT. Zavrotsky schuf diese Vorrichtung für den Unterricht. Die Leser werden kaum Schwierigkeiten haben, erstens zu beweisen, daß diese Vorrichtung auf jeden Fall funktioniert und zweitens das folgende Problem zu lösen: Bei Vorgabe der Rechteckseiten ermittle man die Gesamtlänge des Lichtweges von (0,0) bis in die Ecke; außerdem bestimme man eine Formel, die angibt, wie oft das „Optische Billard" den Lichtstrahl an den Seiten spiegelt.

Verbindet man Paare von Gitterpunkten durch Geraden miteinander, so kann man dadurch eine unbeschränkte Vielfalt von einfachen Polygonen (Bild 148) zeichnen. („Einfach" bedeutet hier, daß keine Seite eine andere schneidet). Die Fläche eines solchen „Gitterpolygons" kann mittels der ermüdenden Methode, es in einfachere Figuren zu zerlegen, berechnet werden; es gibt dafür aber wieder einen einfacheren und amüsanteren Weg. Man wendet dabei das folgende bemerkenswerte Theorem an: Die Fläche eines beliebigen Gitterpolygons ist gleich der Hälfte der Gitterpunkte am Rand plus der Anzahl der Punkte im Inneren minus eins. Die Flächeneinheit ist dabei die Fläche einer „Einheitszelle" des Gitters.

Dieses schöne Theorem – von dem Steinhaus sagt, daß es das erstemal 1899 von G. Pick in einem tschechoslowakischen Journal veröffentlicht wurde – stammt aus der affinen Geometrie, einer Geometrie, die in der Mathematik der Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt. Dies bedeutet, daß das Theorem auch noch stimmt, falls das Gitter durch Streckung und Schiebung verformt wird. Beispielsweise gilt die Formel für das Polygon im Gitter in Bild 149. Wie früher ist die Flächeneinheit die Einheitszelle, in diesem Fall das kleine Parallelogramm rechts. Dieses T-Polygon hat wie sein obiges Gegenstück 24 Randpunkte und 9 innere Punkte; laut Picks Formel ist seine Fläche $12 + 9 - 1 = 20$ Flächeneinheiten, wie man leicht verifiziert. Die Leser mögen sich daran erfreuen, zu versuchen, ob sie einen vollständigen Beweis des Theorems geben können. Eine Beweisskizze ist in H. S. M. Coxeters „Introduction to Geometrie" (New York: John Wiley and Sons, 1961, Seite 209) gegeben.

Man ist versucht anzunehmen, daß Picks Formel einfach auf Polyeder in einem dreidimensionalen ganzzahligen Gitter ausgedehnt werden kann. Bild 150 zerstört diese Illusion jedoch schnell. Es zeigt die Einheitszelle an der (0,0,0)-Ecke eines dreidimensionalen kubischen Koordinatensystems. Die vier Punkte (0,0,0); (1,0,0); (0,1,0) und (1,1,1) markieren die Ecken eines Gittertetraeders. Hebt man die Spitze dieser Pyramide auf (1,1,2) an, so vergrößert man das Volumen, aber weder an den Kanten noch an den Flächen oder im Inneren treten neue Gitterpunkte auf. Indem man die Spitze entlang dieser Koordinatenrichtung anhebt, kann man das Volumen sogar beliebig groß machen, ohne daß die Anzahl der beteiligten Gitterpunkte ansteigt. Man kann jedoch eine Formel finden, indem man ein Hilfsgitter einführt. Der interessierte Leser findet dies in "On The Volume of Lattice Polyhedra" von J. E. Reeve erklärt (in "Proceedings of the London Mathematical

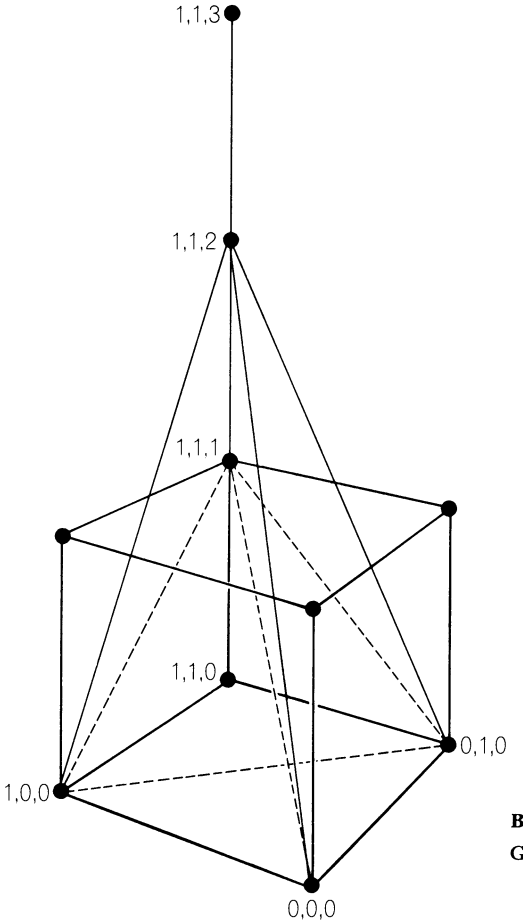


Bild 150
Gitter-Tetraeder

Society"; Juli 1957, Seite 378–395). Bezüglich einer Erweiterung der Formel für höherdimensionale Räume vergleiche man "The Volume of a Lattice Polyhedron" von I. G. Macdonald in "Proceedings of the Cambridge Philosophical Society", Oktober 1963, Seite 719–726.

Ein abschließendes Problem: Am Quadratgitter der ganzen Zahlen verbinde man genau 12 Gitterpunkte so, daß sich ein Gitter-Polygon von derselben Form wie das T-Polygon im Bild 149 ergibt, jedoch mit einer Fläche von zehn Quadrateinheiten. (Entsprechend der Formel von Pick muß es genau fünf Gitterpunkte umschließen.)

Lösungen

Eine Gerade, die am Gitter der ganzen Zahlen von (0,0) ausgeht und die Steigung $\sqrt{27}/\sqrt{3}$ hat, wird durch unendlich viele Gitterpunkte laufen. Wegen $\sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$ vereinfacht sich der Bruch $\sqrt{27}/\sqrt{3}$ zu 3/1, einem rationalen Bruch. Der erste Gitterpunkt auf dieser Geraden ist $y = 3$, $x = 1$.

Auf einem Rechteck mit geraden Seiten wird der den Ursprung unter 45 Grad verlassende Ball durch Gitterpunkte laufen, die durch eine Entfernung getrennt sind (entlang der Koordinatenachsen), die zweimal dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) der Seiten ist. Markiert man diese Punkte durch Punkte wie im Bild 151, so erkennt man, daß nur eine der drei möglichen Ecken einen Punkt enthält, so daß dies die Ecke sein muß, auf die der Ball treffen wird. Um diese Ecke zu bestimmen, dividiert man jede Seite durch den ggT. Sind beide Ergebnisse ungerade, so trifft der Ball die dem Ursprung diagonal gegenüberliegende Ecke. Ist ein Ergebnis gerade (beide können nicht gerade sein), so trifft der Ball die dem Ursprung benachbarte Ecke an dieser Seite. Bezüglich der Gesetze, die im allgemeinen Fall herrschen, wenn der Weg des Balles irgendeinen Winkel mit rationaler Steigung haben kann, vergleiche man M. S. Klamkins Lösung für sein Problem Nr. 116 im „Pi Mü Epsilon Journal", Frühjahr 1963.

Die Formeln für die Weglänge des Balles und die Anzahl der Ablenkungen werden aus Bild 152 (aus Hugo Steinhaus' „Mathematical Snapshots" entnommen) intuitiv klar.

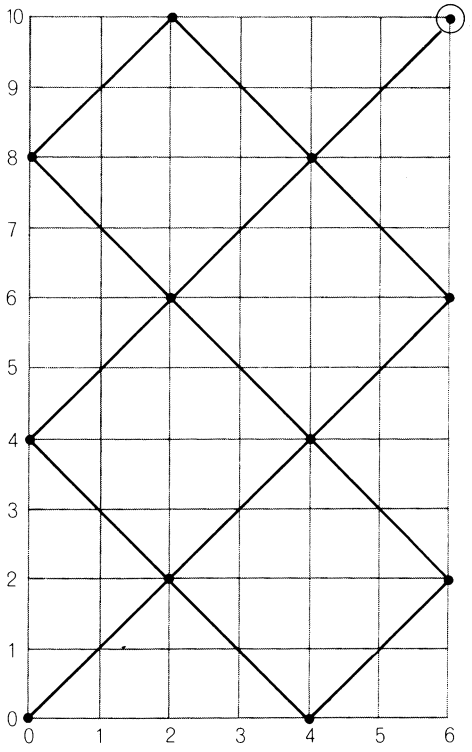


Bild 151 Lösung für das „Gerade-Gerade"-Problem

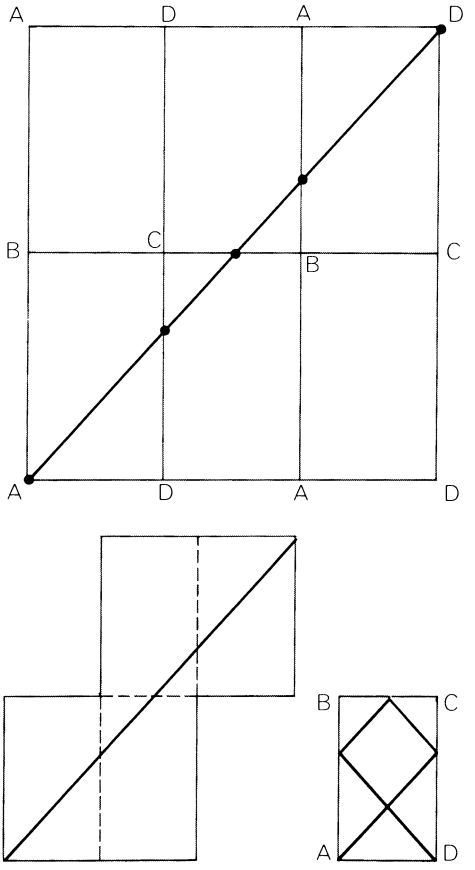


Bild 152 Die zurückgelegte Weglänge des Balles

Wie groß die ganzzahligen Abmessungen des Rechtecks auch sind, es ist immer möglich, ein Quadrat zu bilden, indem man eine endliche Anzahl von Kopien des Rechtecks Seite an Seite fügt, wie es das Bild zeigt. Das kleinste Quadrat, das auf diese Weise gebildet wird, hat eine Seitenlänge, die gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der beiden Seitenlängen des Rechtecks ist.

Man denke sich jedes Rechteck als ein Spiegelbild jedes benachbarten Rechtecks. Die Diagonale von A, wo der Ball seinen 45-Grad-Weg beginnt, bis zur entgegengesetzten Ecke stellt dann sozusagen den „auseinandergefalteten" Weg des Balles dar, der von einer Seite zur anderen prallt. Schneidet man nur jene Rechtecke aus, die den Weg des Balles enthalten (*unten links*), faltet sie entlang der strichlierten Linien zusammen und hält dies dann gegen ein helles Licht, so wird die Diagonale den tatsächlichen Weg des Balles am Rechteck zeichnen (*unten rechts*).

Da die Diagonale des großen Quadrats gleich der Hypotenuse eines rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreiecks ist, dessen eine Seite gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Seiten des Rechtecks ist, erkennt man sofort, daß die Weglänge gleich $\sqrt{2}$ mal dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen ist.

Die Punkte entlang der Diagonalen – ohne die Endpunkte – stellen die Ablenkstellen dar. Es ist leicht zu erkennen, daß die Anzahl der Ablenkungen gleich

$$\frac{a+b}{\text{ggT}} - 2$$

sein muß, worin a und b die Seiten des ursprünglichen Rechtecks sind und ggT ihr größter gemeinsamer Teiler ist.

Bild 153 zeigt die einzig mögliche Art, ein T-Polygon so auf ein Quadratgitter zu zeichnen, daß 12 Punkte am Rand und fünf im Inneren liegen: eine Fläche von zehn Quadrat-Einheiten.

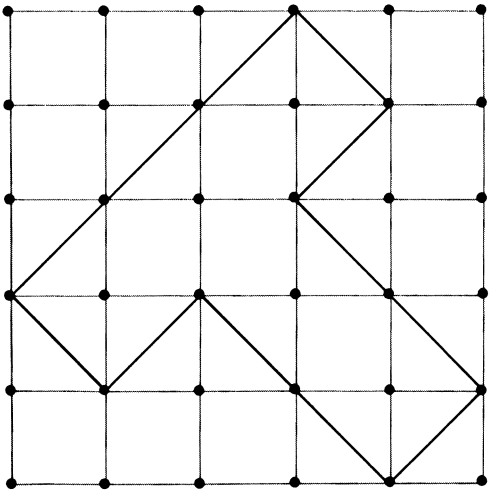


Bild 153
Die Lösung des T-Polygon

21 Endlose Folgen

Chairman of a meeting of the Society of Logicians: "Before we put the motion: 'That the motion be now put', should we not first put the motion: "That the motion: 'That the motion be now put' be now put"?"

Aus einer alten Ausgabe von Punch

Endlose Folgen entlang der Gedanken in einer nie endenden Kette gleicher Schritte nach rückwärts gezwungen werden, haben immer gemischte Gefühle hervorgerufen. Als Beweis dienen die unterschiedlichen Reaktionen der Kritiker, die sich mit dem zentralen Symbol von Edward Albees *Tiny Alice* – dem aufsehenerregendsten Broadwaystück des Jahres 1963 – beschäftigen. Das zentrale Bühnenbild – die Bibliothek eines riesigen Schlosses, das Alice, der reichsten Frau der Welt gehört – wird von einem maßstabgetreuen Modell des Schlosses beherrscht. Darin wohnt die kleine (tiny) Alice. Gehen Lichter im großen Schloß an und aus, so gehen entsprechende Lichter im kleinen Schloß an und aus. Ein Feuer bricht im Schloß und im Modell gleichzeitig aus. Im Inneren des Modells ist ein kleineres Modell, in dem eine noch kleinere Alice wohnt, und so weiter, ähnlich einem Satz ineinandergeschachtelter chinesischer Kästchen. („Scheußlich zu reinigen", ist der Kommentar des Butlers, dessen Name Butler ist.) Ist das Schloß selbst, in das das Publikum während der Aufführung guckt, ein Modell eines noch größeren Modells, und dieses wiederum...? Eine ähnliche Ineinanderschachtelung ist die Grundidee von E. Nesbits Erzählung "The Town in the Library in the Town in the Library" (in ihren "Nine Unlikely Tales"); dies war vielleicht die Quelle für Albees Idee.

Bei vielen Zuschauern dieses Stücks wühlt diese endlose Folge von Schlössern Gefühle der Angst und Hoffnungslosigkeit auf: Die Existenz ist ein geheimnisvolles, unergründliches, im Grunde sinnloses Labyrinth; diese Folge ist ein endloser Korridor, der nirgendwohin führt. Für Theologiestudenten, die angeblich in Scharen in dieses Stück kommen, vertieft diese Folge das Bewußtsein dessen, was der deutsche Theologie Rudolf Otto das *Mysterium tremendum* nennt: Das endgültige Geheimnis, dem man sich mit Ehrfurcht, Faszination und Demut zu nähern hat. Für Mathematiker und Logiker hat diese endlose Folge die meisten ihrer Schrecken verloren; sie ist – wie wir bald sehen werden – sogar in der Unterhaltungsmathematik ein mächtiges, praktisches Werkzeug. Werfen wir zuerst jedoch einen kurzen Blick auf die Rolle, die diese endlosen Folgen in den Gedanken und Briefen der westlichen Welt gespielt haben.

Indem Artistoteles ein Stichwort aus Platos *Parmenides* entnimmt, verwendet er solche endlose Folgen in seiner berühmten „dritten Mann"-Kritik von Platos Ideenlehre. Wenn alle Menschen ähnlich sind, weil sie irgendetwas mit „Dem Menschen" – dem idealen und

ewigen Urbild – gemeinsam haben, wie (fragt Aristoteles) kann man dann den Sachverhalt erklären, daß ein Mensch und „Der Mensch" ähnlich sind, ohne ein weiteres Urbild vorauszusetzen? Und wird nicht dieselbe Begründung nach einem dritten, vierten und fünften Urbild verlangen und so weiter in einer unendlichen Folge von immer idealeren Welten?

Eine ähnliche Abneigung gegen diese endlosen Folgen liegt dem (später von hunderten Philosophen sorgfältig ausgearbeiteten) Argument von Aristoteles zugrunde, daß dem Kosmos eine erste Ursache zugrunde liegen müsse. William Paley, ein englischer Theologe des 18. Jahrhunderts, formulierte dies so: „Eine Kette mit unendlich vielen Gliedern kann sich ebensowenig selbst tragen wie eine aus endlich vielen Gliedern zusammengesetzte." Eine endliche Kette braucht tatsächlich einen Träger, führten die Mathematiker schnell an, aber bei einer unendlichen Kette hängt *jedes* Glied fest an dem darüber befindlichen. Die Frage, was die gesamte Kette trägt, taucht ebensowenig auf wie die Frage, welche Art von Zahl der unendlichen Folge der negativen ganzen Zahlen vorausgeht.

Agrippa, ein griechischer Skeptiker, argumentierte, daß nichts bewiesen werden kann, auch nicht in der Mathematik; denn von jedem Beweis muß man seine Gültigkeit beweisen, und dieser Beweis muß wieder bewiesen werden usw. Dieses Argument wird von Lewis Carroll in seiner Arbeit "What the Tortoise said to Achilles" („Mind", April 1895) wiederholt. Nachdem sie ihr berühmtes Rennen, das eine unendliche Folge von immer kleiner werdenden Entfernungen enthält, beendet hatten, fängt die Schildkröte ihren Sportskameraden mittels einer noch beunruhigenderen Frage. Sie lehnt es ab, eine einfache – ein Dreieck enthaltende – Deduktion zu akzeptieren, bis nicht Achilles eine unendliche Reihe von hypothetischen Annahmen niedergeschrieben hat, von denen jede notwendig ist, um das vorangehende Argument gültig zu machen.

F. H. Bradley, der englische Idealist, argumentiert (nicht sehr überzeugend), daß unser Geist *keine* Art von logischer Relation erfassen kann. Wir können beispielsweise nicht sagen, daß Schloß *A* kleiner als Schloß *B* ist, und es dabei bewenden lassen; denn „kleiner als" ist eine Relation, mit der beide Schlösser verbunden sind. Man nenne diese beiden Relationen *c* und *d*. Nun hat man *c* und *d* mit den beiden Schlössern und mit „kleiner als" in Relation zu setzen. Dies erfordert vier weitere Relationen, diese wiederum acht weitere, und so fort, bis der mitgenommene Leser in den Armen von Bradleys „Absolutum" zusammenbricht.

In der modernen Philosophie wurden diese endlosen Folgen am revolutionärsten von den Mathematikern Alfred Tarski und Kurt Gödel verwendet. Tarski vermeidet gewisse, Schwierigkeiten verursachende Paradoxa in der Semantik, indem er „wahr" in Abhängigkeit von einer endlosen Folge von „Metasprachen" definiert, von denen jede fähig ist, den Wahrheitswert von Aussagen auf dem nächst tieferen Niveau, aber nicht am eigenen Niveau, zu diskutieren. Bertrand Russel erklärte dies einst: „Der Mensch, der sagt: ‚Ich sage eine Lüge der Ordnung n' sagt eine Lüge, aber eine der Ordnung $n + 1$." Mit einem nahe verwandten Argument gelang es Gödel zu zeigen, daß es keine einzelne, in sich abgeschlossene Mathematik gibt, sondern nur eine unendliche Folge von immer reichhaltiger werdenden Systemen.

Die endlose Hierarchie von Göttern, die durch so viele Mythologien und die unvermeidliche Frage der Kinder „Wer hat Gott erschaffen?" impliziert wird, hat auf vie-

le Denker eine Anziehungskraft ausgeübt. William James schloß seine *Varieties of Religious Experience* mit dem Hinweis, daß Existenz eine Vielfalt von Göttern von verschiedenen Einschließungsgraden einschließt, „wobei durch sie ganz und gar keine Einheit verwirklicht wird. Dies würde uns in eine Art Polytheismus zurückführen..." Der Gedanke taucht an unwahrscheinlichen Orten auf. Benjamin Franklin schrieb in einer kuriosen kleinen Arbeit mit dem Titel *Articles of Belief and Acts of Religion*: „Denn ich glaube, daß der Mensch nicht das vollkommenste Lebewesen ist, sondern daß es viele Abstufungen von Lebewesen auf höheren Stufen gibt." Unsere Gebete, sagt Franklin, sollten nur an die uns nächste Gottheit, den Gott unseres Sonnensystems, gerichtet werden. Viele Schriftsteller haben unser Leben als eine Art Brettspiel angesehen, in dem wir die Stücke darstellen, die durch höhere intelligente Wesen bewegt werden, die wiederum Stücke in einem größeren Spiel sind. Der Prophet in Lord Dunsanys Geschichte "The South Wind" nimmt die Götter wahr, wie sie durch die Sterne schreiten, aber indem er sie anbetet, sieht er die ausgestreckte Hand eines Spielers „weit über ihren Köpfen".

Graphiker haben sich lange Zeit an diesen unendlichen Folgen erfreut. Wer erinnert sich beim Betrachten des beeindruckenden Umschlages der Ausgabe von „Scientific American", April 1965 (es wird der in einer Pupille reflektierte Umschlag gezeigt), nicht an eine Frühstückskostschachtel oder einen Zeitungsumschlag aus seiner Kindheit, auf denen ein ähnlicher Trick benützt wurde? Der Umschlag der *Punch*-Ausgabe vom November 1964 zeigt einen Zauberer, der einen Hasen aus seinem Hut zieht. Der Hase wiederum zieht einen kleineren Hasen aus einem kleineren Hut, und diese endlose Folge von Hasen und Hüten windet sich am Rand der Seite hinauf und hinunter. Es ist keine schlechte Darstellung der gegenwärtigen Teilchenphysik. Die neueste Theorie schlägt eine noch kleinere, zur Zeit noch nicht entdeckte Gruppe von Teilchen vor, die „Quarks" genannt werden, um damit die Struktur der bekannten Teilchen zu erklären. Ist der Kosmos selbst ein Teilchen in einer undenkbar ausgedehnten Vielfalt von Materie? Sind die physikalischen Gesetze eine endlose Folge von Huttricks?

Das Spiel im Spiel, die Puppenaufführung in der Puppenaufführung, die Erzählung in der Erzählung haben zahllose Schriftsteller amüsiert. Luigi Pirandellos *Six Characters in Search of an Author* ist vielleicht das bekannteste Beispiel eines Bühnenstückes. Der Held in Miguel de Unamunos Roman *Mist*, der seinen Tod im weiteren Verlauf der Handlung voraussieht, besucht Unamuno, um dagegen zu protestieren und beunruhigt den Autor mit dem Gedanken, daß auch er nur die Figur einer höheren Phantasie ist. Philip Quarles in Aldous Huxleys *Point Counter Point* schreibt einen Roman, der *Point Counter Point* verdächtig ähnlich ist. Edouard, in Andre Gides *The Counterfeiters* schreibt *The Counterfeiters*. Normal Mailers Geschichte "The Notebook" handelt von einer Auseinandersetzung zwischen dem Schriftsteller und seiner Freundin. Während sie diskutieren, schreibt er sich schnell die Idee für eine Geschichte in sein Notizbuch, die ihm gerade gekommen ist. Es ist – natürlich – eine Geschichte über einen Schriftsteller, der gerade mit seiner Freundin diskutiert, als ihm gerade eine Idee kommt ...

J. E. Littlewood erinnert sich in *A Mathematicians Apology* an folgenden Vermerk, der ein Preisausschreiben einer britischen Zeitschrift über das Thema: „Was würden Sie beim Öffnen der Morgenzeitung am liebsten lesen?" gewann.

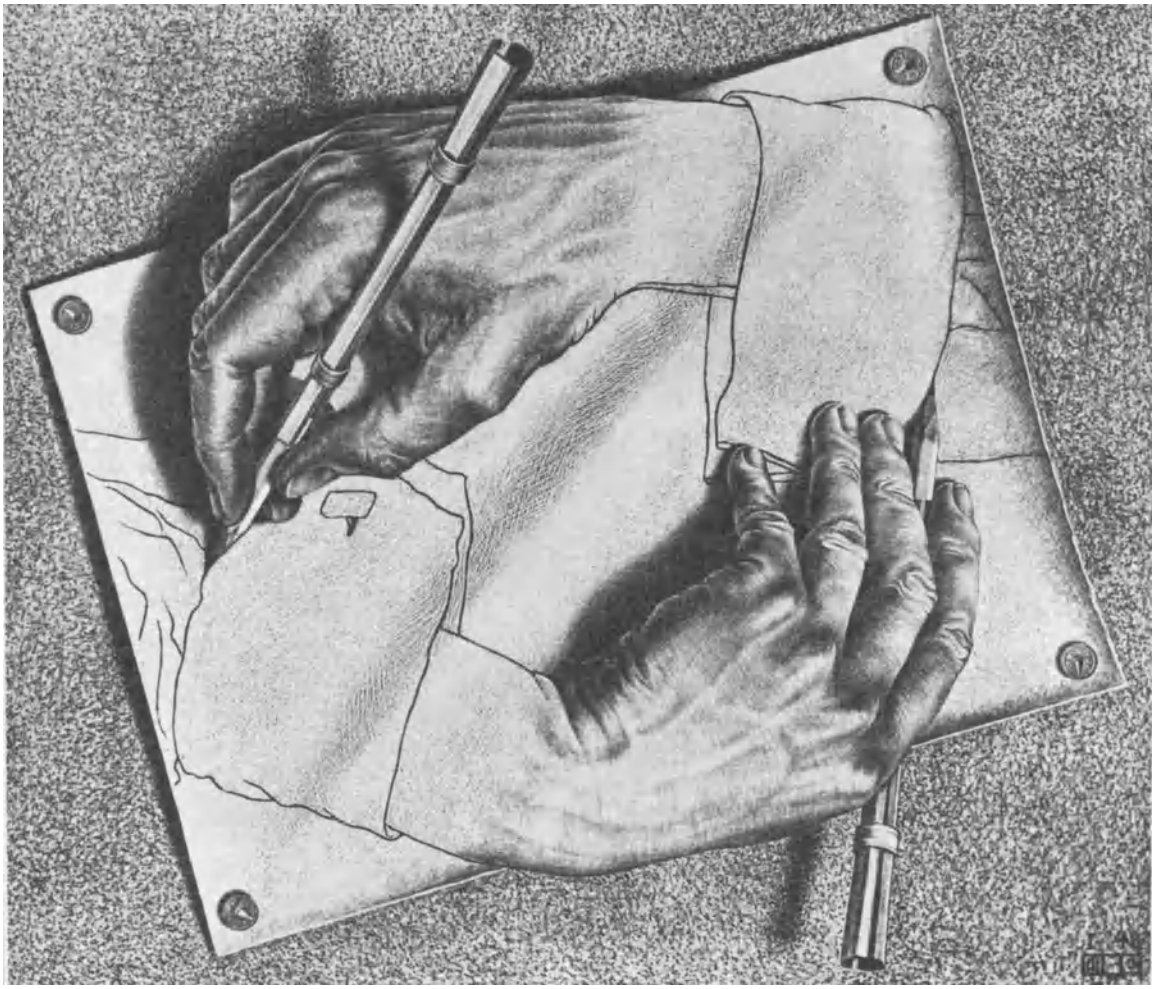
Unser zweiter Wettbewerb

Der erste Preis im zweiten diesjährigen Wettbewerb geht an Mr. Arthur Robinson, dessen geistreiche Einsendung sicherlich die beste aller bei uns eingetroffenen war. Sein Wunsch, was er beim Öffnen seiner Zeitung lesen möchte, trug die Überschrift „Unser zweiter Wettbewerb" und lautete folgend: „Der erste Preis im zweiten diesjährigen Wettbewerb geht an Mr. Arthur Robinson, dessen geistreiche Einsendung sicherlich die beste aller bei uns eingetroffenen war. Sein Wunsch, was er beim Öffnen seiner Zeitung lesen möchte, trug die Überschrift „Unser zweiter Wettbewerb", aber auf Grund der Beschränkung an Papier können wir nicht alles drucken."

Eine Möglichkeit, den qualvollen Verflechtungen solcher endloser Folgen zu entkommen, bietet der topologische Trick, die zwei Enden zu verbinden und so einen Kreis zu bilden – nicht unbedingt in boshafter Weise, wie im Falle der müden Soldaten, die sich im Morast dadurch ausruhen, daß jeder auf dem Schoß des Hintermannes sitzt. Albert Einstein tat genau dies, als er versuchte, die endlose Folge der Entfernungen zu vernichten, indem er den dreidimensionalen Raum zusammenbog und dadurch die Hyperfläche einer vierdimensionalen Kugel formte. Man kann dasselbe mit der Zeit machen. Es gibt östliche Religionen, die annehmen, daß die Geschichte aus einer endlosen Folge von Wiederholungen derselben Ereignisse besteht. Im reinsten Fall denkt man dabei gar nicht an aufeinanderfolgende Zyklen, denn es gibt keine „äußere" Zeit, mit deren Hilfe die Zyklen gezählt werden könnten; *derselbe* Zyklus, *dieselbe* Zeit drehen sich immer wieder im Kreis. Zu diesem Themenkreis ist auch eine Skizze des holländischen Künstlers Maurits C. Escher zu zählen; diese zeigt zwei Hände, wobei jede einen Bleistift hält und die andere zeichnet (Bild 154). In *Through the Looking Glass* träumt Alice vom Roten König, jedoch der König selbst schläft und Alice ist – wie Tweedledee hervorhebt – nur eine „gewisse Figur" in *seinem* Traum. *Finnegans Wake* endet mitten in einem Satz, der den Leser an den Anfang des Buches zurückführt, wo ein Bruchstück eines Satzes das Buch einleitet und den erwähnten letzten Satzteil vollendet.

Seit dem Erscheinen von Fitz-James O'Briens wegbereitender Abenteuergeschichte "The Diamond Lens" im Jahre 1858 haben zahllose Schriftsteller mit dem Thema einer endlosen Folge von Welten auf immer kleiner werdenden Teilchen gespielt. In Henry Hasses Geschichte "He Who Shrank" ist ein Mensch, der auf einem weit größeren als unserem kosmischen Niveau existiert, das Opfer eines wissenschaftlichen Experiments, durch das er zusammenschrumpft. Nachdem er sich über hunderte von Subuniversen hinweg verkleinert hat, verweilt er gerade lange genug in Cleveland, um seine Geschichte zu erzählen, bevor er wieder verschwindet. Dabei fragt er sich, wie lange dies so fortgehen wird und hofft, daß die Niveaus an ihren Enden verbunden sind, so daß er dadurch in seinen ursprünglichen Kosmos zurückkehren kann.

Sogar die unendliche Hierarchie der Götter wurde von Dunsany in seiner wundervollen Erzählung "The Sorrow of Search" in eine geschlossene Kurve gebogen. Eines Nachts, als der Prophet Shaun im Sternenschein die vier Berggötter Asgool, Trodath, Skun und Rhoog beobachtet, erkennt er weiter den Hang hinauf die schattenhaften Umrisse von drei größeren Göttern. Er führt seine Jünger Jahre später den Berg hinauf, um dabei zwei am Gipfel sitzende größere Götter zu entdecken; diese zeigen spöttisch auf die Götter unter ihnen. Shaun steigt mit seinen Jüngern noch höher. Eines Nachts bemerkt er



Escher Foundation—Collection Haags Gemeentemuseum, The Hague

Bild 154 Maurits C. Eschers „Zeichnende Hände"

jenseits der Ebene einen enormen, einzigen Gott, der zornig zum Berg herüberblickt. Shaun geht den Berg hinunter und durchquert die Ebene. Während er die Geschichte in den Felsen meißelt, wie seine Suche mit der Entdeckung des höchsten Gottes geendet hat, sieht er in weiter Ferne die verschwommenen Formen von vier höheren Gottheiten. Der Leser kann vermuten, daß es Asgool, Trodath, Skun und Rhoog sind.

Kein Zweig der Mathematik ist gegen endlose Folgen immun. Die Zahlen beiderseits der Null eilen gegen unendlich. Sie kommen in der modularen Zahlentheorie laufend vor. Jede unendliche Reihe ist mit einer unendlichen Folge verbunden. Der Technik der ma-

thematischen Induktion liegen diese Folgen zugrunde. Georg Cantors transfinite Zahlen formen eine endlose Hierarchie von immer stärkeren „Unendlichs". Ein schönes modernes Beispiel dafür, wie diese endlosen Folgen in einen mathematischen Beweis eingehen, tritt in Verbindung mit dem schwierigen Problem auf, ein Quadrat in andere Quadrate zu unterteilen, die alle unterschiedliche Größen haben (siehe Kapitel 17 in meinem „Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions"; New York, Simon and Schuster, 1965). Es erhebt sich nun die Frage: Ist es in ähnlicher Weise möglich, einen Würfel so in endlich viele kleinere Würfel zu zerschneiden, daß alle von verschiedener Größe sind? Ohne die deduktive Macht der endlosen Folgen würden die Mathematiker vielleicht noch immer vergeblich nach Lösungswegen suchen. Es folgt nun der Beweis, daß dies unmöglich ist.

Man nehme an, daß der Würfel in der angegebenen Weise zerschnitten werden kann. Die Grundfläche eines solchen zerschnittenen Würfels, der auf einem Tisch liegt, wird notwendigerweise ein in kleinere Quadrate unterteiltes Quadrat sein. Man betrachte das kleinste Quadrat in diesem Muster. Es kann nicht in der Ecke liegen, denn ein größeres Quadrat auf der einen Seite hält jedes weitere größere Quadrat auf der anderen Seite davon ab, direkt anzuschließen (Bild 155a). Ebensowenig kann das kleinste Quadrat sonstwo am Rand liegen, zwischen den Ecken, denn größere Quadrate an zwei Seiten hindern ein drittes größeres Quadrat, direkt an die dritte Seite anzuschließen (Bild 155 b). Das kleinste Quadrat muß daher irgendwo im Inneren des Musters liegen. Dies wiederum erfordert, daß der kleinste Würfel, der den Tisch berührt, von größeren Würfeln umgeben ist. Dies ist möglich (Bild 155 c), aber es bedeutet, daß die vier umgebenden Seitenflächen über die vier Seitenflächen des kleinsten Würfels hinausragen, wodurch ein größerer Würfel davon abgehalten wird, an der obersten Fläche direkt anzuschließen. Daher muß auf diesem kleinsten Würfel ein Satz von kleineren Würfeln liegen, deren Grundflächen ein weiteres Muster von Quadraten formen.

Dasselbe Argument wird nun wiederholt. Im neuen Muster von Quadraten wird das kleinste irgendwo im Inneren liegen. Auf diesem kleinsten Quadrat ruht der kleinste Würfel, und die kleinen Würfel darauf ergeben ein neues Muster von Quadraten. Offensichtlich führt dies auf eine unendliche Folge von immer kleineren Würfeln, ähnlich der Folge von Flöhen in Dean Swifts Reimgeklingel. Dies widerspricht der ursprünglichen Annahme, daß das Problem lösbar ist.

Geometrische Konstruktionen wie diese, die eine unendliche Folge von kleiner werdenden Figuren enthalten, führen manchmal zu überraschenden Ergebnissen. Kann eine geschlossene Kurve von unendlicher Länge eine endliche Fläche – beispielsweise von einem Quadratzentimeter – begrenzen? Es gibt unendlich viele solche pathologische Kurven. Man starte mit einem gleichseitigen Dreieck (Bild 156 a) und errichte jeweils am mittleren Drittel ein kleineres gleichseitiges Dreieck. Radiert man jeweils die Basis davon aus, so erhält man einen sechszackigen Stern (Bild 156 b). Die Wiederholung dieser Konstruktion für alle 12 Seiten des Sterns ergibt ein 48-seitiges Polygon (Bild 156 c). Der dritte Schritt wird in Bild 156 d gezeigt. Der Grenzwert dieser unendlichen Konstruktion, die Schneeflockenkurve genannt wird, begrenzt eine Fläche, die 8/5 mal der Fläche des Ausgangsdreiecks ist. Es ist leicht zu zeigen, daß die sukzessive Addition der Längen eine unendliche Reihe liefert, die divergiert. Kurz zusammengefaßt: Die Länge des Umfanges der

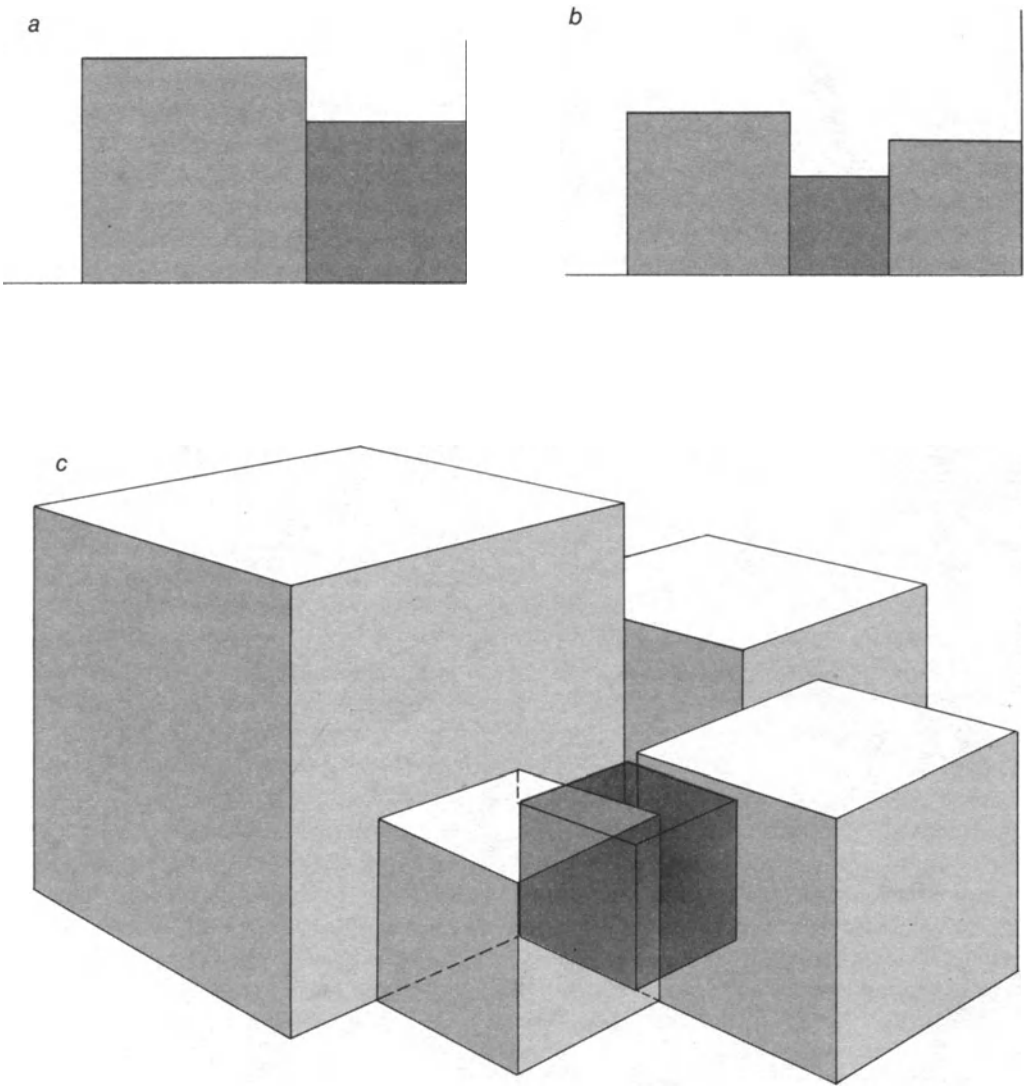


Bild 155 Beweis dafür, daß ein Würfel nicht in endlich viele kleinere Würfel von jeweils verschiedener Größe zerlegt werden kann

„Schneeflocke" ist unendlich. (1956 veröffentlichte der britische Phyiosologe W. Grey Walter einen Science-Fiction-Roman, *The Curve of the Snowflake*, in dem ein Analogon dieser verrückten Kurve die Basis einer Zeitmaschine liefert.)

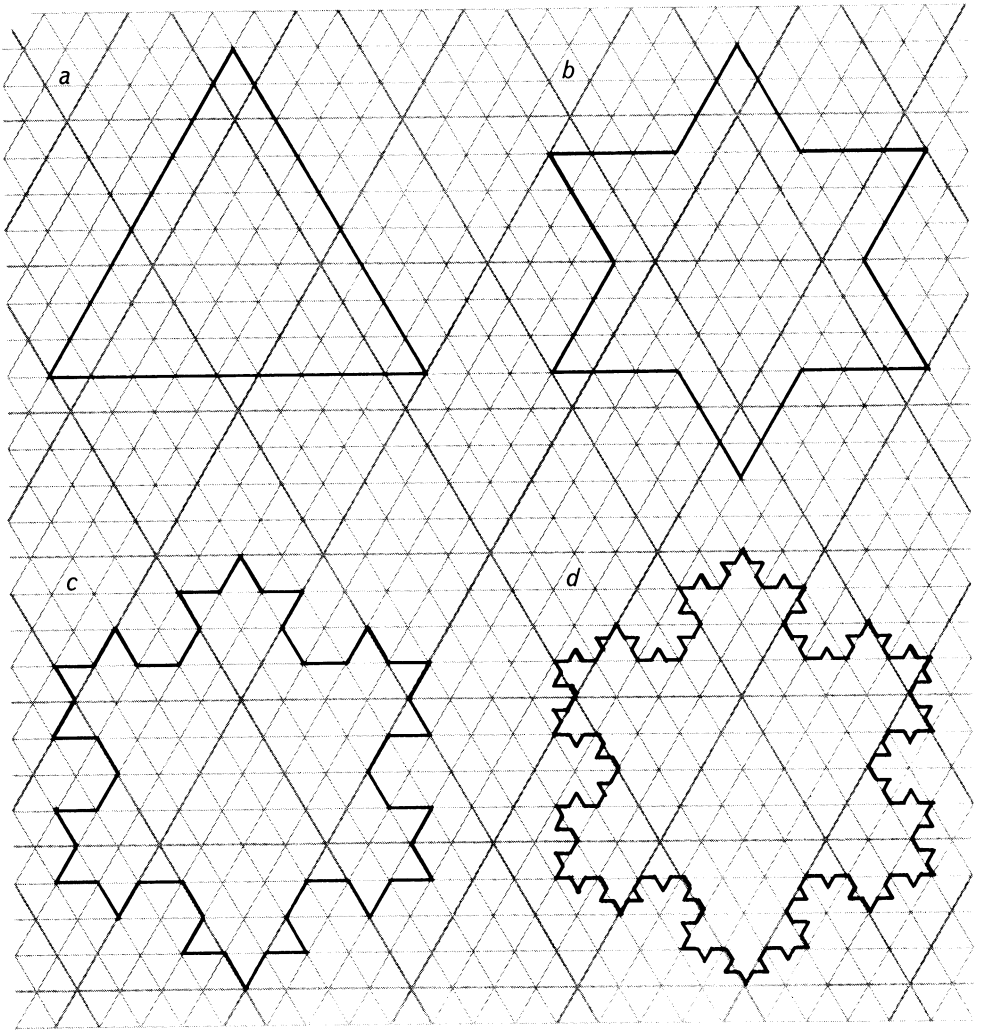


Bild 156 Die Schneeflockenkurve

Hier gebe ich noch zwei einfache Probleme an, die die weniger bekannte „Quadratversion" der Schneeflocke betreffen, die sogenannte Kreuzstichkurve. Auf jedem mittleren Drittel der vier Seiten eines Einheitsquadrats errichte man, wie im Bild 157 gezeigt, vier kleinere Quadrate. Der zweite Schritt wird im Bild unten gezeigt. (Die Quadrate überlappen sich nie, aber die Ecken berühren sich.) Setzt man diese Prozedur unendlich oft fort, wie lang wird der sich ergebende Umfang? Wie groß ist die Fläche, die er einschließt?

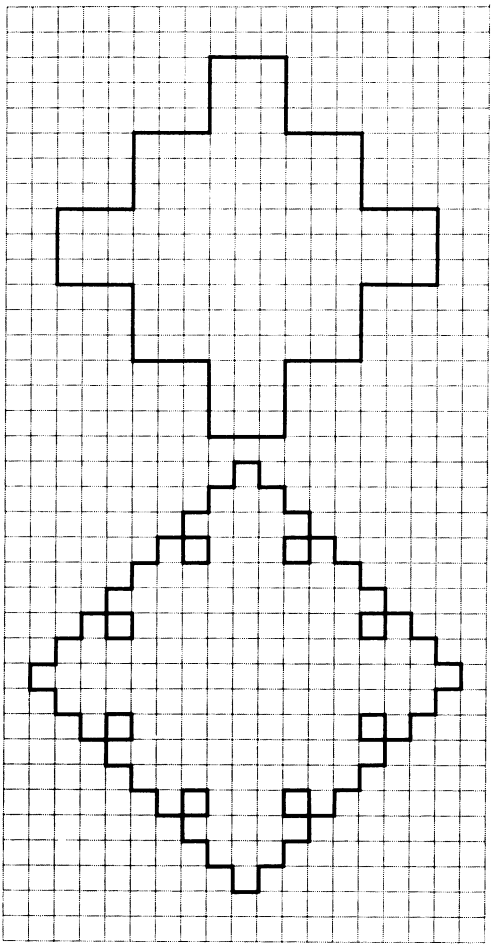


Bild 157
Die Kreuzstichkurve

Lösungen

Die Kreuzstichkurve hat, wie ihr Analogon, die Schneeflocke, eine unendliche Länge. Sie begrenzt eine Fläche, die zweimal so groß ist wie die des ursprünglichen Quadrats. Die Zeichnung links im Bild 158 zeigt ihr Aussehen nach der dritten Konstruktion. Nach vielen weiteren Schritten gleicht sie (wenn man sie aus einiger Entfernung betrachtet) der Zeichnung rechts im Bild. Obwohl die „Stiche" diagonal zu laufen scheinen, ist jedes Kurvenstück im Bild vertikal oder horizontal. Ähnliche Kurven können mit Hilfe eines beliebigen regelmäßigen Polygons konstruiert werden, aber über das Quadrat hinaus sind die Figuren durch Überlappungen verschmiert, so daß gewisse Vereinbarungen darüber getroffen werden müssen, was man unter der eingeschlossenen Fläche versteht.

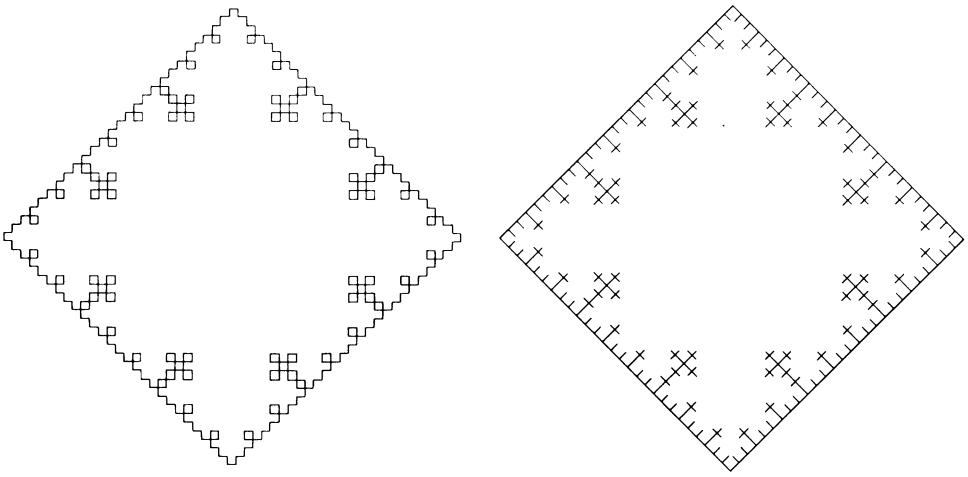


Bild 158 Die Lösung zum Kreuzstichkurven-Problem

Samuel P. King Jr. aus Honolulu stellte eine schöne Analyse solcher Kurven zusammen, die auch eine Variante der Kreuzstichkurve beinhaltet, die von seinem Vater entdeckt wurde. Anstatt die vier Quadrate jeweils nach außen zu zeichnen, werden sie nach innen gerichtet. Die Grenzkurve hat eine unendliche Länge, aber die eingeschlossene Fläche ist Null.

22 O'Gara, der mathematische Briefträger

I'm seen in the country, I'm seen in the town,
I'm servant of all from pauper to crown.
Take one letter from me, and still my good name
In spite of your action continues the same.
Take from me two letters, then three and then four,
My name will continue the same as before.
In fact, you can take all the letters I've got
And my name you will not have altered one jot!

Ich blätterte gerade einen Stapel ungeöffneter Briefe auf meinem Schreibtisch durch, wobei ich nach seltenen ausländischen Briefmarken Ausschau hielt, als mir ein hellroter Klebezettel ins Auge stach. Darauf stand: „Bitte benachrichtigen Sie sofort P. O., falls dieses Klebeetikett beim Versand runtergefallen ist."

Dies hatte ein derart unverkennbares "Irish bull"-Fluidum (dessen Wesen in der logischen Kontradiktion besteht), daß ich nicht erstaunt war zu entdecken, daß „P. O." nicht für "Post Office", sondern für den Absender, einen Patrick O'Gara aus Brooklyn stand. Sein Brief begann mit der obigen Scharade, die nach seiner Aussage einer seiner Großväter vor einem halben Jahrhundert aus einer englischen Zeitung ausgeschnitten hatte. O'Gara war Briefträger von Beruf, aber nebenberuflich beschäftigte er sich mit Unterhaltungsmathematik. Bei seinen täglichen Rundgängen unterhielt er sich damit, ausgefallene Puzzles zu ersinnen. Ob ich daran interessiert wäre, einige davon mit ihm zu besprechen?

Ich muß zugeben, daß der Durchschnitt der Menge aller in diesem Buch interviewten Leute mit der Menge aller existierenden Lebewesen leer ist. Dies hat mich jedoch nie von weiteren Interviews abgehalten. Außerdem war ich psychologisch darauf vorbereitet, einem bemerkenswerten Briefträger zu begegnen, da ich vor kurzem wieder eine meiner liebsten Pater-Brown-Stories, "The Invisible Man", gelesen hatte. In dieser mysteriösen Mordgeschichte von G. K. Chesterton schwören vier Zeugen, daß niemand ein gewisses Gebäude betreten oder verlassen hat; denn alle nehmen den Briefträger als so selbstverständlich hin, daß sie es nicht der Mühe wert finden, ihn zu erwähnen: „Niemand nimmt von den Briefträgern je Notiz", wie Pater Brown es formuliert, „doch sie haben Leidenschaften wie andere Leute ..."

Obwohl O'Garas Hauptleidenschaft Unterhaltungsmathematik war, hatte er noch eine kleinere für Briefmarken. Es stellte sich heraus, daß er ein junger, athletisch gebauter Bursche mit sandfarbenem Haar und sommersprossigem Gesicht war. Seine Ausbildung hatte nicht über die Mittelschule hinaus gereicht, aber das kleine Studierzimmer in seiner

Junggesellenwohnung in Brooklyn Heights war mit alten und neuen Büchern über mathematische Rätsel überschwemmt, und nach einer Unterhaltung von wenigen Minuten war klar, daß er auf diesem Gebiet sehr bewandert war.

„Sind Sie Briefmarkensammler?", fragte er.

„Nein", antwortete ich, „aber mein zehnjähriger Sohn hat gerade mit einem Album begonnen."

„Regen Sie ihn an, sich zu spezialisieren", meinte O'Gara. „Die große Mode heute ist das thematische Sammeln. Niemand sammelt mehr alles bunt gemischt. Darf ich Ihnen einige meiner Themen zeigen?"

Seine größte Sammlung betraf Mathematik. Ich war erstaunt, wie viele Portraits großer Mathematiker auf diesen kleinen Stichen erschienen waren, seit Deutschland 1926 die erste mathematische Briefmarke ausgegeben hatte: eine violette 40-Pfennig-Marke mit dem Kopf von Leibniz. O'Gara hatte französische Marken zu Ehren von Descartes, Pascal, Buffon, Carnot, Laplace, Poincaré und vielen anderen; italienische Marken, die Szenen aus dem Leben von Galilei zeigten; holländische Briefmarken mit den Köpfen von Huygens, Lorentz und anderen; russische Briefmarken zu Ehren von so bemerkenswerten Männern wie Euler, Chebyshev und Lobaschevski; einen beeindruckenden Satz von vier norwegischen Marken zum hundertsten Todestag von Abel im Jahre 1929. Zwei Marken vom irischen Freistaat aus dem Jahre 1943 zeigten Portraits von Hamilton, um den hundertsten Jahrestag seiner Entdeckung der Quaternionen zu feiern. Gauß war auf einer deutschen Briefmarke des Jahres 1955 zu sehen. Ein rumänisches mathematisches Journal, „Gazeta Matematica", wurde an seinem 50. Geburtstag durch zwei Marken geehrt und 1955 feierte Griechenland den 2 500. Jahrestag der Pythagoreischen Schule, indem ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem Seitenverhältnis 3 : 4 : 5 auf vier Briefmarken erschien (Bild 159). Eine französische Briefmarke aus dem Jahre 1937 zu Ehren von Descartes ist besonders interessant, da die erste Ausgabe einen falschen Titel seiner größten Arbeit zeigt. (Der Titel wurde bei der zweiten Ausgabe korrigiert.)

„Haben die Vereinigten Staaten jemals einen Mathematiker durch eine Briefmarke geehrt?", fragte ich.

O'Gara schüttelte den Kopf. „Auch England nicht, aber England hat natürlich eine Entschuldigung. Dort werden die Portraits auf den Briefmarken auf die königliche Familie beschränkt." (1966 trug eine purpurrote amerikanische 8-Cent-Briefmarke Einsteins Bild, aber Einstein war nicht in erster Linie Mathematiker.)

Eine von O'Garas amüsantesten thematischen Sammlungen enthielt, was er „wissenschaftlichen Blödsinn" nannte – Briefmarken, auf denen jemand einen eklatanten wissenschaftlichen Fehler begangen hatte. Die britische Kolonie Saint Kitts-Nevis gab 1903 eine Briefmarke heraus, die Kolumbus zeigt, der an Deck mit einem Fernglas (das noch nicht erfunden war) nach Land sucht. Die Ohren eines Schiläufers auf einer österreichischen Marke aus dem Jahre 1934 sind verkehrt aufgesetzt. Das Sternbild des „Kreuz des Südens" wurde irgendwie umgekehrt, als es 1940 auf einer brasilianischen Marke erschien. Eine amerikanische Erinnerungsmarke an die Transkontinentale Eisenbahn aus dem Jahre 1944 zeigt, wie der Rauch der Lokomotive in die eine Richtung zieht, die Fahne aber in die andere Richtung weht.

Bild 159 Eine Briefmarke aus dem Jahre 1955 zum Gedenken der Pythagoreischen Schule

Bild 160 Eine serbische und eine US Briefmarke, die ein verstecktes Bild zeigen, wenn sie auf den Kopf gestellt werden

Eine weitere thematische Sammlung bestand aus „versteckten Bildern". 1904 gab Serbien eine berühmte „Totenmaske"-Briefmarke heraus: Die Profile von Karageorge und Peter I Karageorgevich verschmelzen, auf den Kopf gestellt, zu einer Totenmaske des serbischen Königs Alexander I Obrenovich – der im Jahr zuvor von den Anhängern Karageorgevichs ermordet worden war. Auf einer amerikanischen 3-Cent-Marke aus dem Jahre 1932 verwandeln sich die Schleife und die Hemdvorderseite von Daniel Webster in das Gesicht von Fu Manchu, wenn sie auf dem Kopf stehend betrachtet werden (Bild 160). Eine Bergkette auf einer amerikanischen Nationalpark-Ausgabe aus dem Jahre 1934 ergibt das Profil eines Mannes, wenn sie um 90 Grad gedreht wird. Eine 1935er Boulder Dam-Briefmarke schaut, gewendet, wie die Freiheitsglocke aus. Auf einer westdeutschen 50-Pfennig-Marke aus dem Jahre 1964 ist ein kleines Gesicht Hitlers zwischen den Blättern eines Baumes versteckt. O'Gara hatte eine Unzahl anderer Marken dieser Art.

Geht ein Briefträger auf Urlaub, so unternimmt er lange Spaziergänge, pflegte der Romandetektiv Charlie Chan zu sagen. Während eines Urlaubs in Europa hatte O'Gara tatsächlich einen speziellen Ausflug zum baltischen Hafen Kaliningrad (früher Königsberg, die Hauptstadt Ostpreußens) unternommen, nur um in einem Zug über die berühmten sieben Brücken von Königsberg zu wandern, ohne dabei über eine Brücke zweimal zu gehen. Er erklärte, daß ihm dies deshalb möglich war, weil eine achte Brücke über den Pregel-Fluß gebaut worden war, nachdem Leonhard Euler als erster bewiesen hatte, daß

das ursprüngliche Problem unlösbar war. An einem freien Tag im vergangenen Winter hatte O'Gara, durch einigen irischen Whisky gestärkt, ausgedehnte Untersuchungen über random-walk-Probleme auf einem großen, freien Schneefeld irgendwo in Brooklyn betrieben.

„Ich kann mir sehr gut geometrische Muster bildlich vorstellen", erzählte er mir. „Ich pflegte als Junge sehr viel Schach mit verbundenen Augen zu spielen. So arbeite ich in meiner Vorstellung an meinen graphischen Rätseln, während ich meine Runden mache. Beispielsweise..."

Er unterbrach, um für mich die Skizze einer Ansammlung von Häusern anzufertigen, wo er einst Post zugestellt hatte (Bild 161). In jedem zweiten Block standen Häuser, und bei jedem Haus war Post abzugeben, entsprechend der Darstellung in der Skizze.

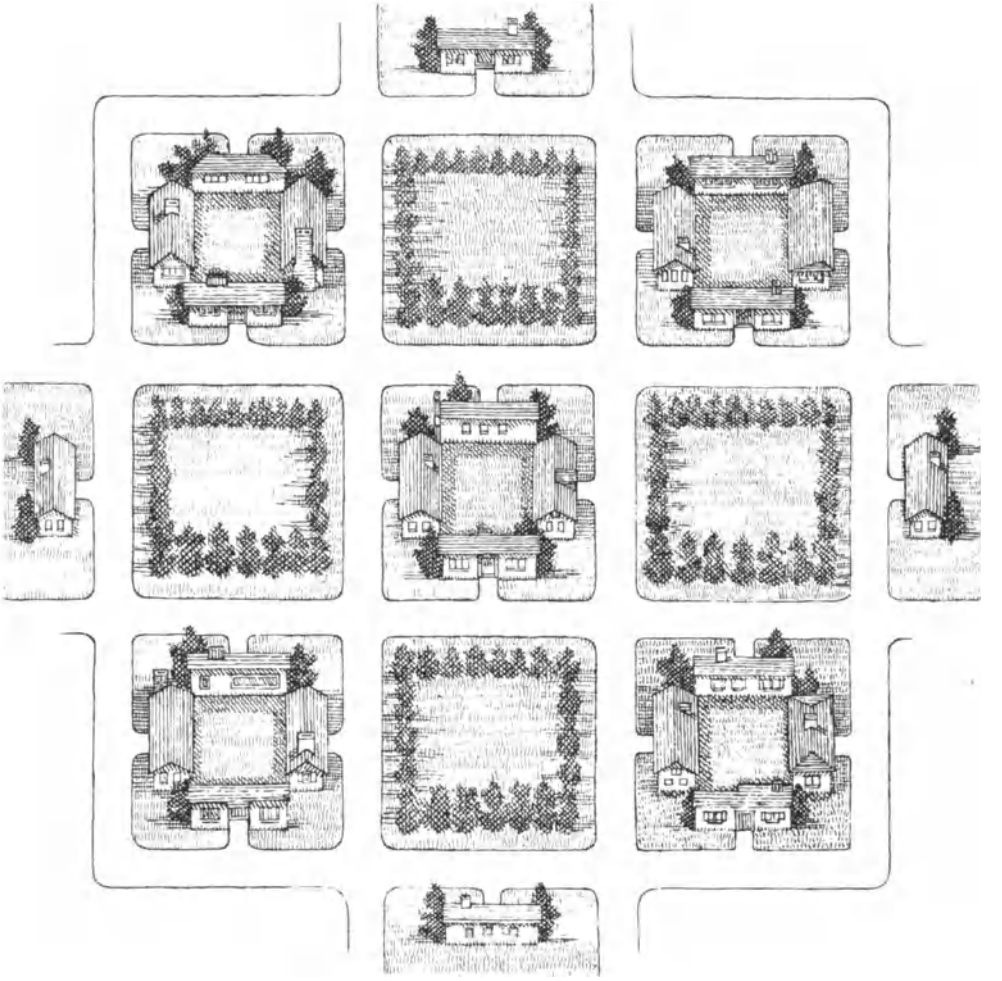


Bild 161 Wie sieht die beste Zustellroute aus, die jedes Haus erfaßt?

„Eulers Regeln können hier leicht angewendet werden", sagte O'Gara. „Sie zeigen, daß es nicht möglich ist, in allen acht Straßen Post zuzustellen, ohne dabei einige der Blöcke öfter als einmal abzugehen." (Bei einem Netz eines nicht unterbrochenen Weges, bei dem kein Teil zweimal gegangen wird, gibt es entweder *keine* Überschneidungen, wenn eine ungerade Anzahl von Wegen zusammenläuft, oder es muß *genau* zwei solche Überschneidungen geben.) „Aber wie *kurz* kann der Weg sein? Ich gelangte bald zu der Überzeugung, daß er nicht kürzer als 27 Blocklängen sein konnte. Monatelang versuchte ich jeden Tag, neue „27-Block-Wege" zu finden, die noch gewisse Bedingungen erfüllten. Zum Beispiel fand ich alle Arten von Wegen, die die acht Straßen in einem 27-Block-Weg bedeckten, ohne jemals links abzubiegen (Bild 162). Schließlich kam ich auf zwei nette Probleme, von denen ich glaube, daß sie Ihren Lesern gefallen könnten."

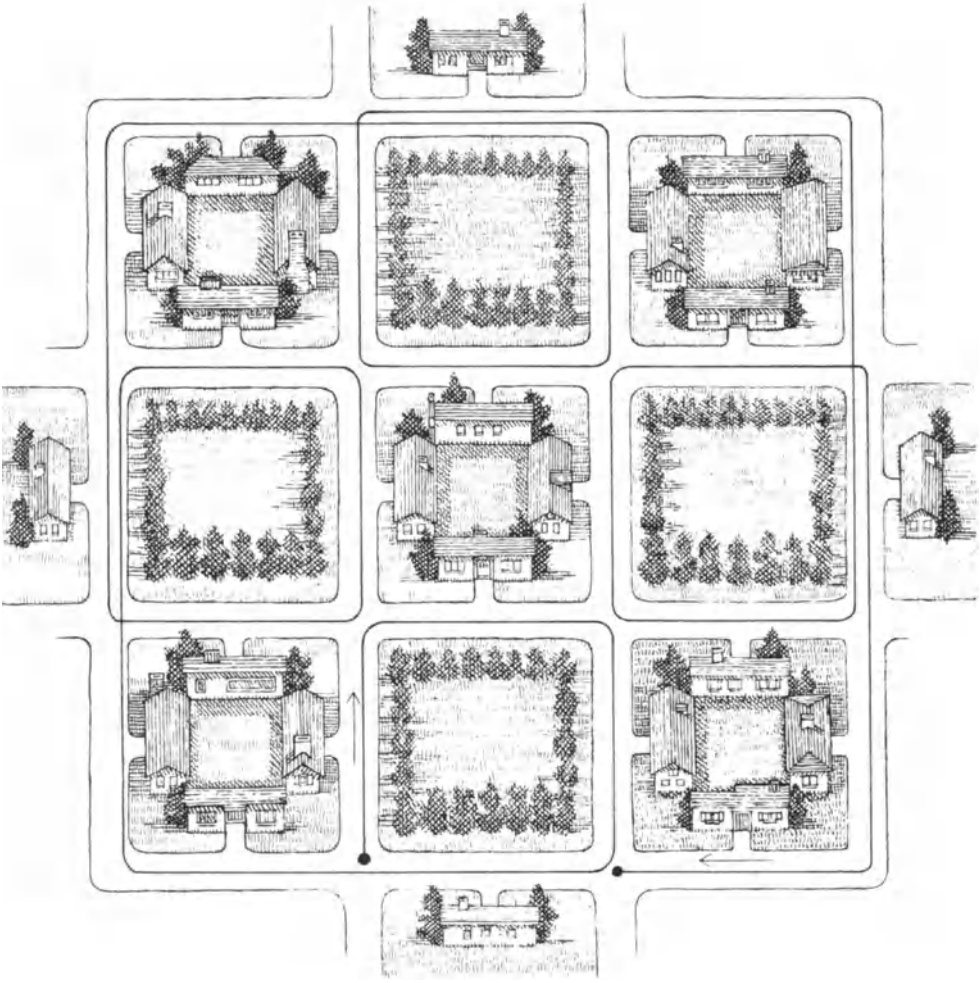


Bild 162 Eine Route von minimaler Länge, die nur Rechtsbiegungen aufweist

Das erste Problem, das O'Gara erklärte, besteht darin, einen Weg zu finden, der alle Straßen in der minimalen Länge von 27 Blocklängen durchläuft und außerdem die minimale Anzahl von Biegungen hat. Der Weg im Bild hat beispielsweise 19 Biegungen – weit mehr als nötig. Eine „Biegung" tritt an jener Stelle auf, wo der Weg die Richtung ändert; die Biegungen können nach links oder nach rechts gehen, und der Weg kann am Ende offen oder geschlossen sein. Das zweite Problem besteht darin, einen Weg von 27 Blocklängen mit der maximalen Anzahl von Biegungen zu finden. In beiden Problemen muß die gesamte Länge von jeder der acht Straßen durchlaufen werden.

„Wenn mich die Suche nach den kürzesten Wegen zu langweilen beginnt", setzte O'Gara fort, „dann suche ich gerne nach den *längsten*. Beispielsweise hatte ich einmal Post bei zehn Häusern zuzustellen, die auf einer Straßenseite lagen und voneinander jeweils denselben Abstand hatten. Wie sieht der längste Weg aus, den ein Briefträger wählen kann, wenn er bei irgendeinem Haus losgeht, in direkter Linie zum nächsten geht, dann zum dritten usw. bis er bei jedem Haus einmal gewesen ist?"

Er fertigte die im Bild 163 gezeigte Skizze an, um mir zu erläutern, wie er es zuerst versucht hatte: vom Haus 1 zum Haus 6 entlang eines Weges von 45 Einheitsintervallen.

„Und es gibt längere Wege als diesen?", fragte ich.

O'Gara nickte. „Sie könnten Ihre Leser fragen, ob sie den schlechtesten finden können. Falls ihnen diese Art von kombinatorischen Rätseln gefallen, so können sie versuchen, das folgende schwierigere Problem zu lösen: die Formel für den längsten Weg als Funktion von n Häusern zu finden."

„Glänzend", sagte ich, während ich in meinem Notizbuch kritzelte. „Aber ich möchte dieses Interview nicht mit Weg-Problemen überladen. Haben Sie irgendwelche guten Rätsel erdacht, die sich mit anderen Dingen befassen. Beispielsweise mit Hausnummern?"

O'Gara öffnete eine Schublade, in der er anscheinend hunderte von Problemen – sauber auf Karteikarten aufgezeichnet – hatte. Hier eines, das er mir zeigte.

Eine lange Straße verläuft von Ost nach West; auf beiden Seiten stehen Häuser. Die Häuser auf einer Seite tragen ungerade Hausnummern in geordneter Reihenfolge, beginnend bei 1. Die Häuser auf der anderen Seite haben gerade Hausnummern, die mit 2 beginnen. Auf jeder Seite sind mehr als 50 und weniger als 500 Häuser. Smith wohnt auf der ungeraden Seite. Die Summe aller ungeraden Hausnummern östlich von ihm ist genau gleich der Summe der ungeraden Hausnummern westlich von ihm. Analoges gilt für Jones, der auf der geraden Seite wohnt: Die Hausnummern westlich von ihm – auf seiner Strassenseite – haben dieselbe Summe wie die Nummern östlich von ihm. Welche Hausnummern haben Smith und Jones?

„Haben Sie in Ihrer Abteilung je das alte Problem von der Person erwähnt, die n Briefe schreibt, n Kuverts adressiert und dann die Briefe in willkürlicher Reihenfolge in die Kuverts steckt?", frage O'Gara.

„Ja", antwortete ich, „allerdings brachte ich es in der Version, daß zwei Pakete gemischter Karten gleichzeitig ausgeteilt werden. Wenn ich mich richtig erinnere, dann geht die Wahrscheinlichkeit, daß kein Brief mit dem Kuvert übereinstimmt, mit steigendem n gegen den Grenzwert $1/e$."

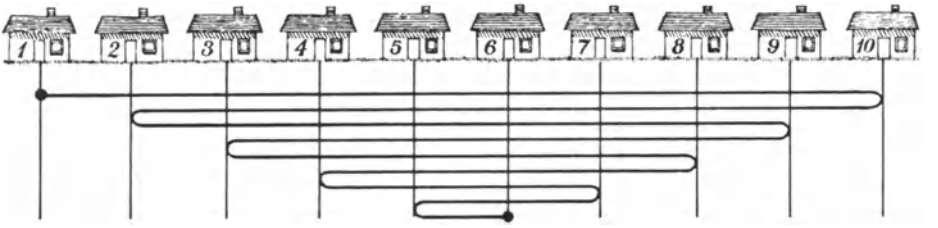


Bild 163 Ein den längsten Weg betreffendes Problem

„Richtig", sagte O'Gara. „Bei nur vier Briefen ist leicht zu zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein oder mehr Briefe an die richtige Person gesandt werden, 5/8 ist; die Wahrscheinlichkeit, daß *genau* ein Brief an die richtige Person geht, ist 1/3."

„Wenn Sie es sagen, dann glaube ich es", sagte ich.

„Können Sie mir", fuhr er leicht lächelnd fort, „die Wahrscheinlichkeit dafür sagen, daß genau ein Brief *falsch* zugestellt wird?"

Ich begann, eine Liste aller Permutationen von *A, B, C* und *D* niederzuschreiben, aber O'Gara ergriff mein Handgelenk: „Sie müssen es im Kopf machen", meinte er, „und in weniger als 10 Sekunden."

Für einen Moment war ich überrascht, dann aber brach ich in ein Lachen aus. Weiß der Leser warum?

Als ich von der U-Bahn zu O'Garas Wohnung gegangen war, hatte es heftig geregnet. Als ich mich verabschiedete, regnete es noch immer. „Nun ja", sagte ich, als wir uns die Hände schüttelten, „Sie werden sehen, daß weder Schnee noch Regen, noch Hitze, noch die Nacht diesen Kurier von der schnellen Vollendung seiner festgelegten Runden abhalten kann."

„Oh ja", meinte er zusammenzuckend, „beinahe jeder, nehme ich an, kennt diesen von Ihnen so schlecht zitierten Ausspruch. Aber können Sie mir sagen, wer ihn als erster getan hat?"

Ich konnte es nicht und stelle O'Garas letzte Bemerkung als abschließende Frage.

Lösungen

Wie im Bild 164 gezeigt wird, kann der kürzeste Weg, der alle acht Straßen in dem Quadrat mit den drei Blöcken an jeder Seite durchläuft und dabei so wenig als möglich Biegungen macht, mit der geringen Anzahl von zehn Biegungen erhalten werden. Die Lösung ist bis auf Spiegelungen und Drehungen eindeutig. Um zu beweisen, daß 10 ein Minimum darstellt, beachte man zuerst, daß das Netz acht Stellen hat, an denen eine ungerade Anzahl von Wegen zusammentreffen. Entsprechend wohlbekannter Regeln kann der Graph nicht mittels eines stetigen Weges durchlaufen werden (ohne über gewisse Teile des Graphen zweimal zu laufen), außer man reduziert die Anzahl dieser „ungeraden Stellen" auf zwei oder null. Dies kann durch Verdoppelung gewisser Teilstücke des Graphen geschehen, aber es muß in einer Weise erfolgen, daß die Gesamtlänge so wenig wie mög-

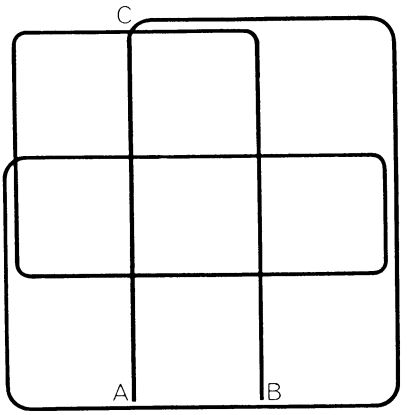


Bild 164 Die Lösung mit der minimalen Anzahl von Biegungen

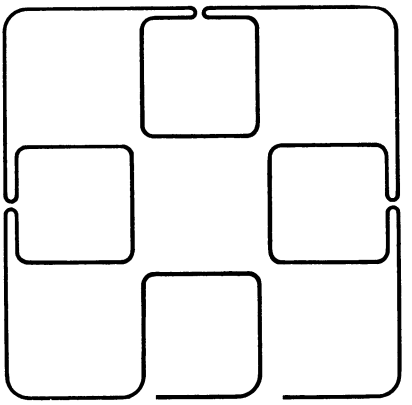


Bild 165 Beweis für die Lösung mit der minimalen Anzahl von Biegungen

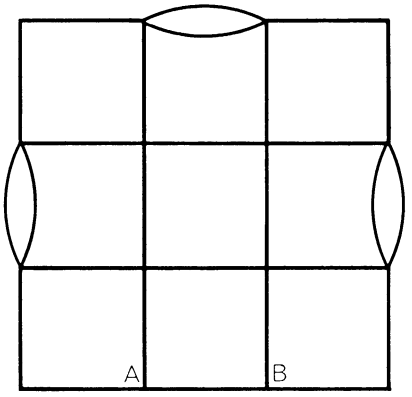


Bild 166
Die Lösung mit der maximalen Anzahl von Biegungen

lich vergrößert wird. Es ist leicht zu sehen, daß der kürzeste Weg durch Verdoppelung von drei Segmenten (wie im Bild 165 gezeigt) zu erhalten ist. Die verdoppelten Segmente zeigen Teilstücke des ursprünglichen Graphen an, die zweimal durchlaufen werden müssen. Dieser kürzeste Weg hat eine Länge von 27 Blöcken, mit *A* und *B* (die zwei verbleibenden „ungeraden Stellen") als Endpunkten. Viele Leser ignorierten die Bedingung, daß die gesamte Länge aller acht Straßen durchlaufen werden muß. Falls es erlaubt ist, halbe Blöcke nicht abzugehen, dann kann der Briefträger alle Häuser mit einer minimalen Weglänge von 23 Blöcken erreichen. Die Illustration war irreführend, denn sie sollte ein Netzwerksproblem darstellen.

Fünf Straßen können in ihrer ganzen Länge ohne Biegung durchlaufen werden. Nennt man jedes Segment, das ohne Biegung durchlaufen wird, einen „Zug", so ist klar, daß diese fünf Straßen fünf Züge erfordern. Jede der verbleibenden drei Straßen erfordert

zumindest je zwei Züge, da jede einen Mittelblock hat, der zweimal durchlaufen werden muß. Daher hat jeder stetige Weg von A nach B zumindest 11 Züge, was gleichbedeutend mit 10 Biegungen ist. Man nehme an, daß man bei A beginnt und bis C fortläuft. Bei C kann man nicht nach links laufen, denn dann wären zwei Züge nötig, um die rechten zwei Drittel der obersten Straße zu vollenden, was insgesamt drei Züge für diese Straße ergibt; für die Minimallösung ist dies für diese Straße jedoch auf zwei beschränkt. Daher muß man nach rechts abbiegen. Fährt man auf diese Weise fort, indem man an jeder Kreuzung die Alternativen analysiert, so findet man, daß nur zwei Wegmuster zehn Biegungen ergeben. Ein Muster ist das Spiegelbild des anderen. Bild 166 zeigt einen 27-Block-Weg mit der maximalen Anzahl von Biegungen: 26. Auch er ist bis auf Spiegelungen und Drehungen eindeutig.

Der längste Weg, der nötig ist, um die Reihe der zehn Häuser im zweiten Problem zu besuchen, wird im Bild 167 gezeigt. Er hat eine Länge von 49 Einheiten. Ist die Anzahl der Häuser gerade, so ist die Länge des längsten Weges $\frac{1}{2}(n^2-2)$; ist sie ungerade, so ist die Länge $\frac{1}{2}(n^2-3)$. Bezüglich der Herleitung der beiden Formeln vergleiche man Problem Nr. 64 in Hugo Steinhaus' *One Hundred Problems in Elementary Mathematics* (New York: Basic Books, 1964). Ist n gerade, so muß ein Wegende bei einem der zwei mittleren Häuser liegen. Ist n ungerade, so muß es bei einem der drei mittleren Häuser liegen. Wie R. H. Shudde hervorhob, sind die Wege für n größer als 4 nicht eindeutig.

Die Hausnummer von Smith ist 239, in einer Reihe von 169 Häusern. Jones Hausnummer ist 408, in einer Reihe von 288 Häusern. Für das Smith betreffende Problem hat man ganzzahlige Lösungen von $2x^2 - 1 = y^2$ zu finden; für Jones ganzzahlige Lösungen von $2x^2 + 2x = y^2$, wobei x die Anzahl der Häuser und y die Hausnummer ist. Beide Diophantischen Gleichungen haben unendlich viele Lösungen, aber wir wissen, daß die Anzahl der Häuser in beiden Fällen zwischen 50 und 500 liegt. Dies beschränkt – für jede Gleichung – die Lösung auf ein Zahlenpaar x und y.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau ein Brief ins falsche Kuvert kommt (wenn vier in willkürlicher Weise in vier Kuverts gesteckt werden) ist Null; denn es ist unmöglich, daß drei Briefe mit den entsprechenden Kuverts übereinstimmen und der verbleibende vierte nicht.

Das Zitat „Weder Schnee noch Regen noch Hitze noch das Dunkel der Nacht...", das an der Fassade des New Yorker Hauptpostamtes in der achten Avenue und 33. Straße eingemeißelt ist, stammt vom griechischen Historiker Herodot. Es ist in seiner „Geschichte", Buch VIII, Kapitel 98, enthalten.

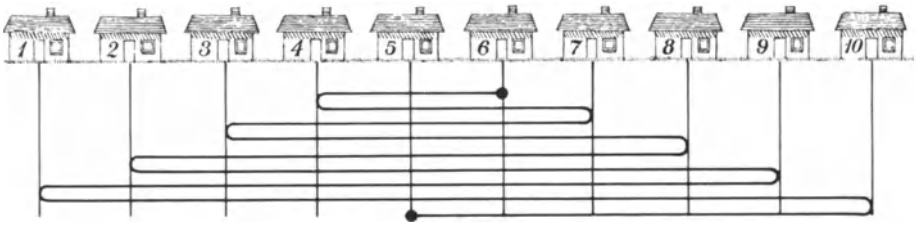


Bild 167 Die Lösung für den gesuchten längsten Weg

23 Op Art

Op (für „Optical") übertraf Pop (für „Popular") als moderne Gemäldekunst der mittleren Sechzigerjahre; ihre Muster waren in Anzeigen und auf Kleidern zu finden, auf Badeanzügen, Krawatten und Socken, auf Jalousien, Vorhängen, Tapeten, Fußbodenbelägen und Verpackungen, auf Einbänden von Mathematikbüchern und wer weiß sonst noch wo. Op Art ist, wie inzwischen sicherlich jeder weiß, der Name für eine Art von abstrakter Kunst, die scharfe, klare Linien zeigt und die es an und für sich seit einem halben Jahrhundert gibt. Ihr kennzeichnendes Charakteristikum ist eine starke Betonung mathematischer Regelmäßigkeit. Manchmal wird sie von Effekten begleitet, die verwirren und das Auge schmerzen sollen: Intensive Farben, die stark nachwirkende Bilder erzeugen, wenn man das Auge wegwendet, optische Illusionen, gestreifte und gesprenkelte Muster, die das Hirn wie das retinale Flimmern von Migräne plagen. Ein Zweig der Op Art beschäftigt sich mit Moire-Mustern, die von Gerald Oster und Yasunori Nishijima in „Scientific American" (siehe „Moire-Muster", Mai 1963) und von C. L. Stong ("The Amateur Scientist", November 1964) beschrieben werden. Osters leuchtende Muster wurden in verschiedenen New Yorker Kunstgalerien ausgestellt.

Der Op-Trend ist, wie viele Kritiker sagen, mehr als nur eine Auflehnung (wie Pop) gegen die Willkür des abstrakten Expressionismus; er reflektiert, wie Mathematik, Wissenschaft und Technologie unserem Leben in steigendem Maße ihren Stempel aufdrücken. Wie man feststellte, hat „Scientific American" seit Jahren Op Art präsentiert. Man betrachte die folgenden Umschläge: "Perfect" Rectangel, November 1958; Reactor Fuel Elements, Februar 1959; "Graeco-Latin" Square, November 1959; "Visual Cliff" (mit seinem verzerrten Schachbrett, einem beliebten Op-Muster), April 1960; Spark Chamber, August 1962; Moire Pattern, Mai 1963 und Afterimage Test Pattern, Oktober 1963. Diese Umschläge stellen beinahe reine Op Art dar. Sie lassen kaum Zweifel über die nahe Verwandschaft von Op mit der modernen Wissenschaft aufkommen.

Obwohl sich Op Art manchmal in reichen und warmen Farben darbietet, scheint ihre Anziehungskraft doch eher in ihren kalten, starren, präzisen, unemotionellen und unpersönlichen Qualitäten zu liegen. Ihre erstaunliche Popularität läßt die uralten Fragen über Kunst und Mathematik wieder aufleben: In welchem Ausmaß wird Kunst durch mathematische Gesetze beherrscht? In welchem Ausmaß können rein mathematische Strukturen ästhetische Gefühle erwecken? „Die Hauptformen der Schönheit sind Ordnung, Symmetrie und Präzision", schrieb Aristoteles in seiner *Metaphysik* (13. Buch) „die in der mathematischen Wissenschaft in besonderem Maße demonstriert werden." „Ein Mathematiker ...", erklärte G. H. Hardy in "A Mathematician's Apology", „ist ein Erzeuger von Modellen ... (Seine) Modelle müssen, wie die des Malers und des Dichters, *schön* sein; die Ideen müssen, wie die Farben oder wie Worte, auf harmonische Weise zusammenpassen. Das erste Kriterium ist die Schönheit: es gibt auf der Welt keinen dauerhaften Platz für häßliche Mathematik."

Wir sind – sagen die Verfechter der Op Art – auf allen Seiten von scharfgezeichneten Quadraten und Kreisen, Ellipsen und Rechtecken umgeben. Die Fenster eines Wolkenkratzers, die Straßen einer Stadt, die Vorderseiten von Aktenschränken – alle ergeben orthogonale Muster wie ein Schachbrett. Warum sollten wir diese geometrischen Grundformen nicht in unserer Kunst wiedergeben? Die Gegner erwidern: Aber wir möchten dem entkommen, nicht an Kurven niedriger Ordnung und 90-Grad-Winkel einer technologischen Kultur erinnert werden. Unsere Augen sehnen sich nach willkürlichen Kurven, gemischten Farben und weichen Konturen, nach den Mustern von Blättern und Wolken und von bewegtem Wasser. Wer kann die Gleichung eines Eichenbaumes aufstellen? Die mathematische Struktur ist noch immer vorhanden, aber in der Natur wie in der weniger strengen abstrakten Kunst ist sie vielfältiger, unbekümmerter und – sagen die Kritiker der Op Art – vom ästhetischen Standpunkt aus gesehen, weniger langweilig. (Siehe den Umschlag von "The New Yorker", 14. August 1965, auf dem Saul Steinberg diese Idee als Illustration dargelegt hat.)

Welche Einstellung man auch immer zu Op Art hat, ihre Faszination kann nicht verleugnet werden. Es ist auch nicht verwunderlich, daß viele Op-Muster in enger Beziehung zu Problemen der Unterhaltungsmathematik stehen. Man betrachte beispielsweise die ineinandergeschachtelten und gedrehten Quadrate (oder Rechtecke), die auf so vielen Op-Bildern und Stoffmustern zu sehen sind und die auf dem Umschlag von "Scientific American", Juli 1965, nach innen wirbeln. Das Muster kann als eine Illustration zum bekannten „Vier-Käfer-Problem" interpretiert werden, das im Kapitel 12 meines "Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions", (New York: Simon and Schuster, 1959) beschrieben wird. Vier Käfer beginnen an den vier Ecken eines Quadrats mit konstanter Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn (oder gegen den Uhrzeigersinn) zu kriechen, wobei sich jeder immer direkt auf seinen Nachbarn zubewegt. Während die Käfer auf einen Treffpunkt im Zentrum zustreben, markieren sie in jedem Zeitpunkt die Eckpunkte eines Quadrats; während sie kriechen, verkleinert und dreht sich dieses von ihnen dargestellte Quadrat. Jeder Käfer bewegt sich entlang einer logarithmischen Spirale, deren Länge genau gleich der Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats ist.

Starten n Käfer an den Ecken eines regelmäßigen n-seitigen Polygons, so markieren ihre Positionen während ihrer Wanderung zu jedem Zeitpunkt die Ecken eines ähnlichen Polygons. Wie beim Quadrat schrumpft dieses Polygon und dreht sich dabei, während die Käfer entlang einer Spirale nach innen kriechen. Eine Konstruktion, die auf dem Fall eines Dreiecks basiert, wird im Bild 168 gezeigt; diese wurde ursprünglich von Rutherford Boyd für eine alte Ausgabe von "Scripta Mathematica" gezeichnet. Das Bild enthält nichts als Dreiecke, aber man erkennt sie kaum, da das Auge so stark von den spiralförmigen Kurven beeinflußt wird. In diesem Fall hat jede logarithmische Spirale 2/3 der Länge der ursprünglichen Dreiecksseite.

Für regelmäßige Polygone mit mehr als vier Seiten ist die Weglänge jedes Käfers größer als die Länge einer Seite. J. Charles Clapham bewies in dem nun nicht mehr erscheinenden "Recreational Mathematics Magazine" (August 1962), daß die Weglänge eines an der Ecke A startenden Käfers auf trigonometrische Weise gefunden werden

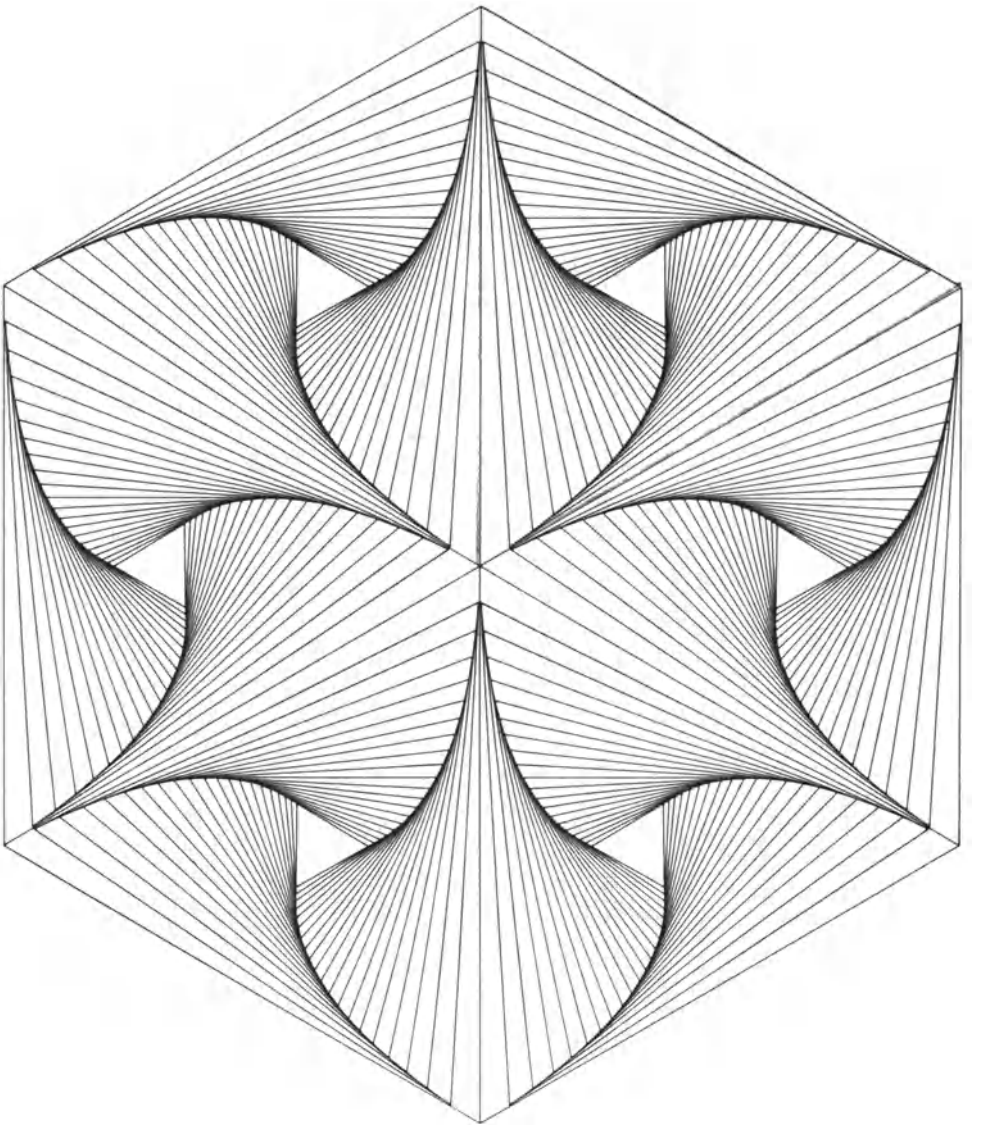


Bild 168 Eine auf dem „Drei-Käfer-Problem" basierende Konstruktion

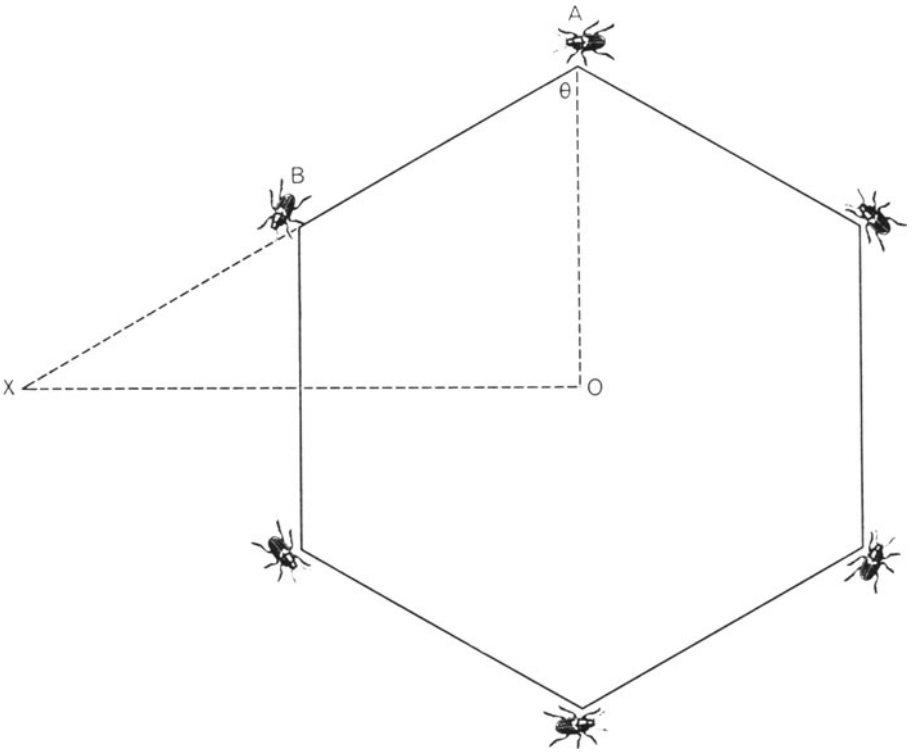


Bild 169 Zur Berechnung der Weglänge eines Käfers

kann; dazu wird die Seite AB (Bild 169) verlängert und darauf ein Punkt X markiert, so daß der Winkel AOX 90 Grad beträgt. Die Entfernung AX – die gleich r dividiert durch den Kosinus des Winkels θ ist – ist die Weglänge, die der Käfer zurücklegt. Wie man aus dem Bild erkennt, ist die Weglänge des Käfers im Falle eines Sechsecks gleich zweimal der Seitenlänge.

Claphams einfache Formel gilt auch für das Quadrat und das Dreieck, ja sogar für das entartete „zweiseitige Polygon" – eine gerade Linie mit dem Winkel $\theta = 0$ und Käfern, die sich von den beiden Enden aus aufeinander zu bewegen, bis sie mit den Köpfen zusammenstoßen. Im anderen Extremfall kann der Kreis als ein entartetes „unendlich-seitiges Polygon" betrachtet werden mit Käfern an unendlich vielen „Ecken". Diese Käfer laufen für alle Zeiten im Kreis herum, wie die Raupen in dem berühmten Experiment von Jean Henri Fabri, die acht Tage lang auf dem Rand einer großen Vase im Kreis einander nachwanderten. Wenden wir Claphams rechten Winkel auf den Kreis an, so ist θ offensichtlich 90 Grad und die Hypotenuse ist unendlich lang.

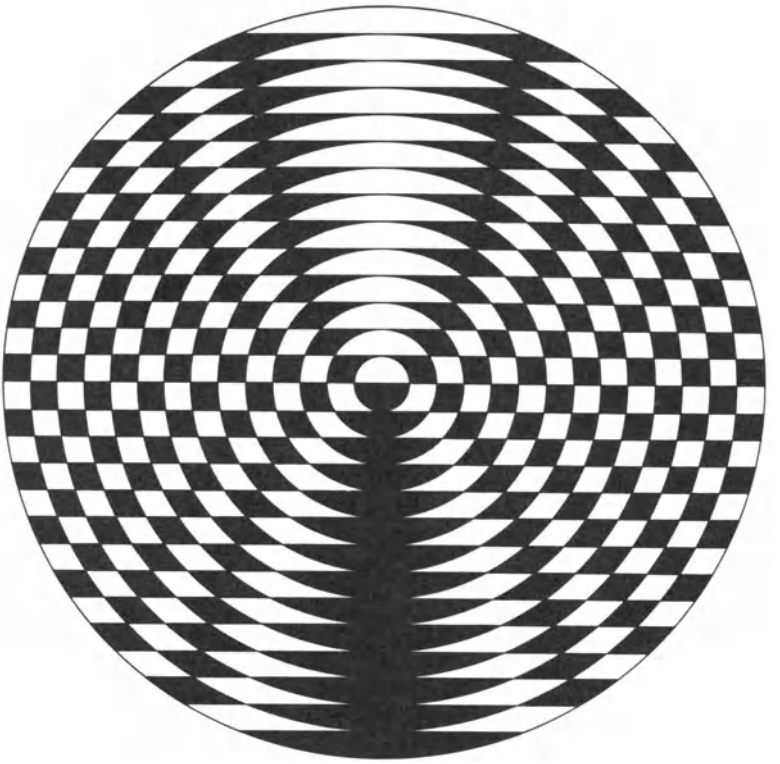


Bild 170 Baravalles kreisförmiges „Schachbrett"

Man nimmt an, daß die Op-Maler hier und im Ausland noch tausende kurioser Muster entdecken werden, die in wissenschaftlichen und mathematischen Lehrbüchern und in alten Exemplaren von akademischen Journalen verborgen liegen. Frühe Ausgaben von "Scripta Mathematica" beispielsweise sind voll von aufregendem prä-Op. Bild 170 zeigt ein beeindruckendes Muster, das der Mathematiker Hermann Baravalle dadurch erhielt, daß er parallele Linien durch konzentrische Kreise zog und die sich ergebenden Felder dann nach Schachbrettart färbte. Man könnte meinen, daß dieses Muster topologisch gleich dem quadratischen Schachbrett ist – d. h., daß ein quadratisches Schachbrett aus Gummi stetig so verformbar ist, daß sich das vorliegende Muster ergibt. Dies ist nicht der Fall, aber es regt zu folgendem netten Problem an: Kann man das Muster mit einem geraden Schnitt so durchschneiden, daß jeder der beiden Teile topologisch äquivalent dem quadratischen Schachbrett ist? Bild 171 zeigt, wie Torbjörn Johansson, ein schwedischer Künstler, Baravalles Färbetechnik auf eine Ellipse anwendete.

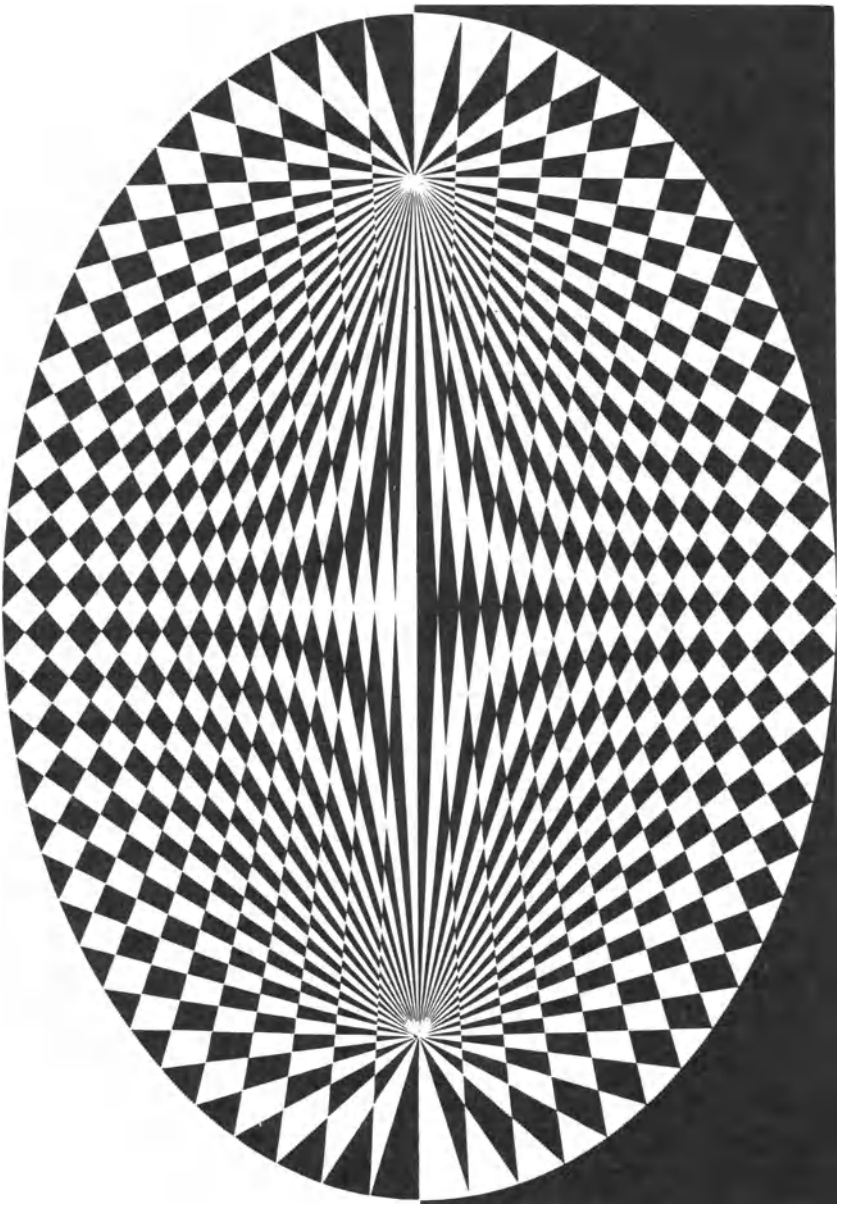


Bild 171 Elliptisches „Schachbrett"

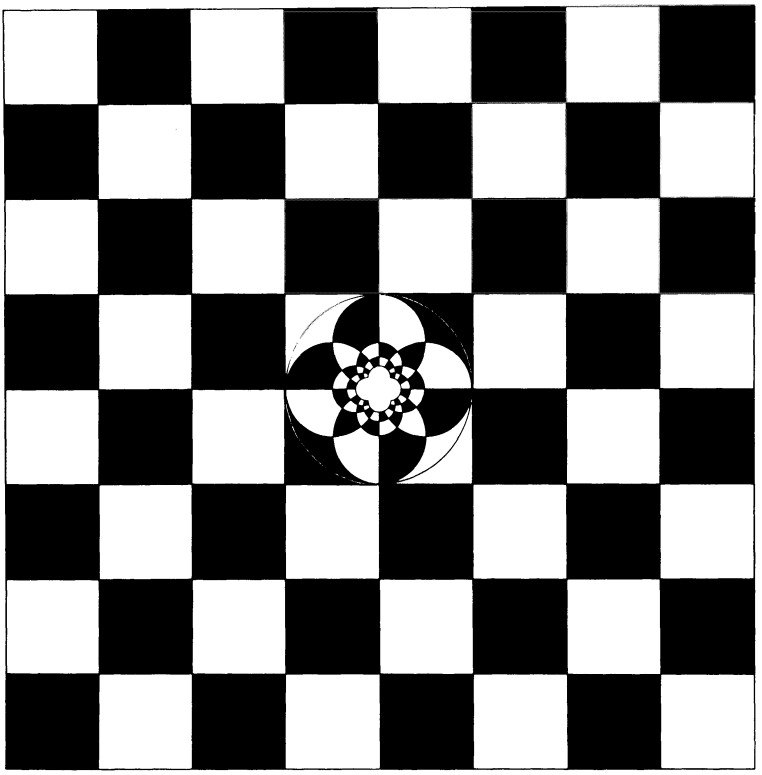


Bild 172 Inversionsmuster eines Schachbretts

Im Bild 172 hat Baravalle jeden Punkt P außerhalb des Kreises auf dem Schachbrett so in den entsprechenden Punkt P' im Inneren des Kreises invertiert, daß $OP \cdot OP' = r^2$ gilt; dabei ist O der Mittelpunkt des Kreises und r dessen Radius. Jeder Punkt außerhalb des Kreises ist so in ein-eindeutige Beziehung zu den inneren Punkten gesetzt. Einer Geraden, die vom Brett weg ins Unendliche gezogen wird, entspricht eine Gerade im Inneren des zentralen weißen Raumes, die nach innen auf das Zentrum zuläuft, dieses aber nie erreicht.

Derartige Inversionsgeometrie kann natürlich im dreidimensionalen Raum genauso wie in der Ebene angewendet werden. Ein alter mathematischer Witz besagt: Um einen Löwen zu fangen hat man nur einen Käfig zu bauen und dann an der Bestie eine Inversion auszuführen. Der gesamte Kosmos kann invertiert werden und in das Innere eines Tennisballes gepreßt werden. In Amerika wurde tatsächlich um 1870 ein religiöser Kult gegründet, der propagierte, daß der wahre Sachverhalt durch einen solchen invertierten dreidimensionalen Raum wiedergegben wird. Cyrus Reed Teeds "Koreshanity" gab das gesamte Universum *ins Innere* der Erde. Wir stellen uns vor, daß wir von der Außenseite der Erde auf gigantische Sterne in einem unendlichen Raum blicken; die Wahrheit ist jedoch – sagt

Teed — daß wir im Inneren einer hohlen Erde sind und nach *innen* hin auf kleine Sterne blicken, die sich in einem Raum bewegen, der das geometrische Inverse des Raumes der orthodoxen Astronomie ist. Teed verteidigte seine Ansichten in vielen Büchern und Artikeln; Jahre später zog er mit diesen Ideen eine Gefolgschaft in Deutschland an. (Mehr Details über diesen verrückten Kult findet man in Kapitel 2 meines Buches "Fads and Fallacies in the Name of Science"; New York, Dover, 1957.)

Bild 173 zeigt zwei Beispiele schwindelerregender Muster, die von Psychologen vor mehr als 50 Jahren studiert wurden.

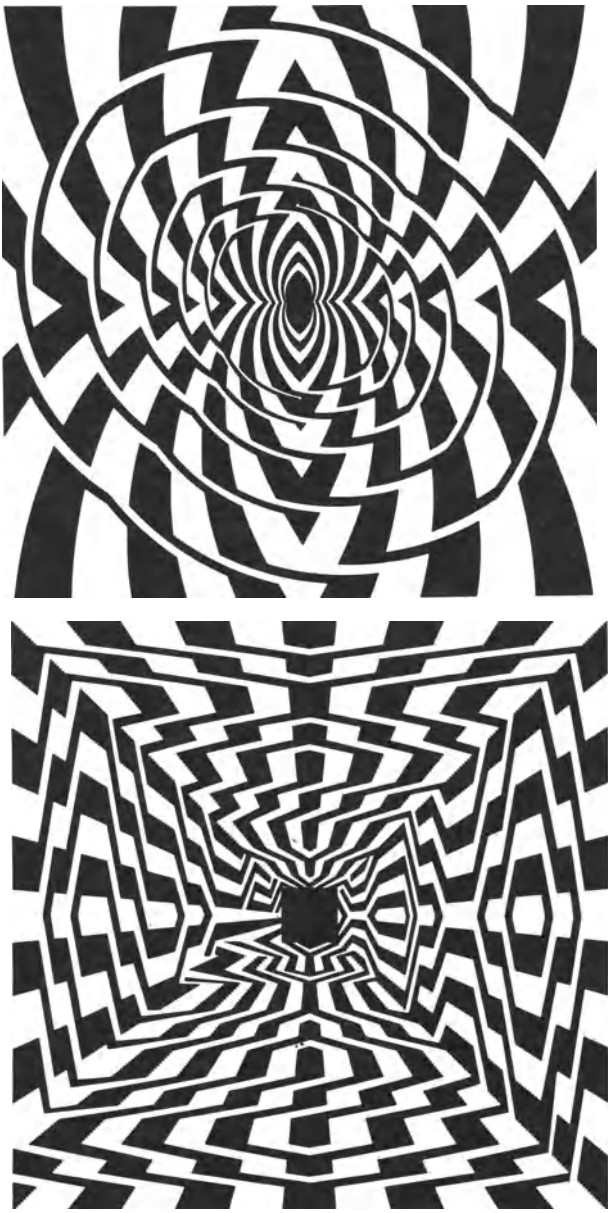


Bild 173
Konzentrische Kreise (oben) und Spirale (unten) aus "twisted cord"

Sie sind unter der Bezeichnung "twisted-cord illusions" bekannt, da sie das erstemal entdeckt wurden, als man einen weißen und einen schwarzen Faden zu einer einzigen Schnur zusammendrehte, die dann auf unterschiedliche Arten auf verschieden gemustertem Hintergrund arrangiert wurde. Die obere Figur besteht aus konzentrischen Kreisen (wie man mit einem Zirkel beweisen kann); die Spirale in der unteren Figur besteht aus geraden horizontalen und vertikalen „Schnüren" (wie man mit einem Lineal nachweisen kann).

Parkettierungen der Ebene, die durch Aneinanderfügen von Kopien ein und derselben Grundform geschaffen werden, wurden lange Zeit von Designern verwendet und tauchen nun in vielen der letzten Op-Strukturen auf. Das Kreuz-Pentomino findet man auf Op-Kleidung, für die 1965 von Bouwit Teller geworben wurde. *Alle* Polyominos und Polyiamonds (Polyiamonds werden aus gleichseitigen Dreiecken anstelle von Quadraten geformt) der Ordnung sechs oder kleiner passen so zusammen, daß die Ebene überdeckt werden kann, aber bis jetzt habe ich nur das Kreuz-Pentomino und das L-Tromino auf Op-Kleidung gesehen (Letzteres auf einem von Gimbels in New York City verkauften Schal). Der Leser kann sich selbst leicht sein eigenes Op-Muster schaffen, indem er Wege sucht, um die Ebene mit jedem der 12 Pentominos oder der 12 Hexiamonds zu überdekken (bezüglich der Hexiamond-Formen vergleiche man das Kapitel über Polyiamonds in diesem Buch).

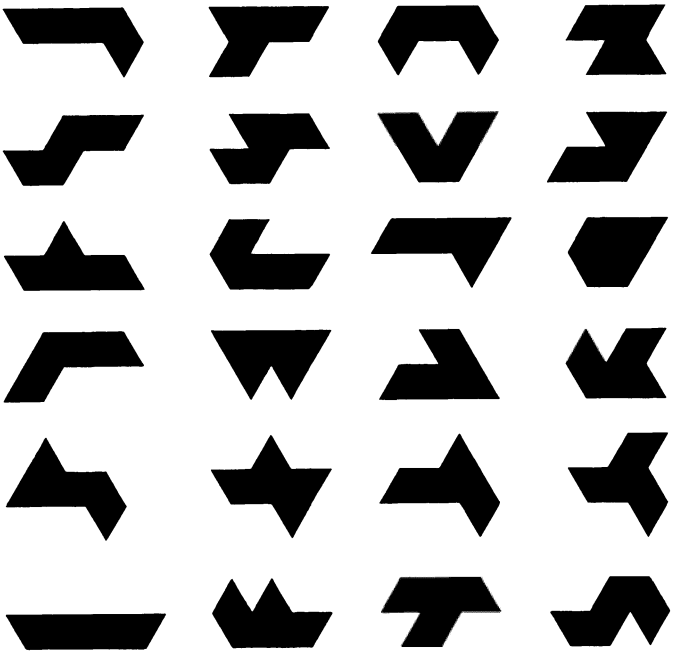


Bild 174 Die 24 Heptiamonds. Mit welchem kann die Ebene nicht überdeckt werden?

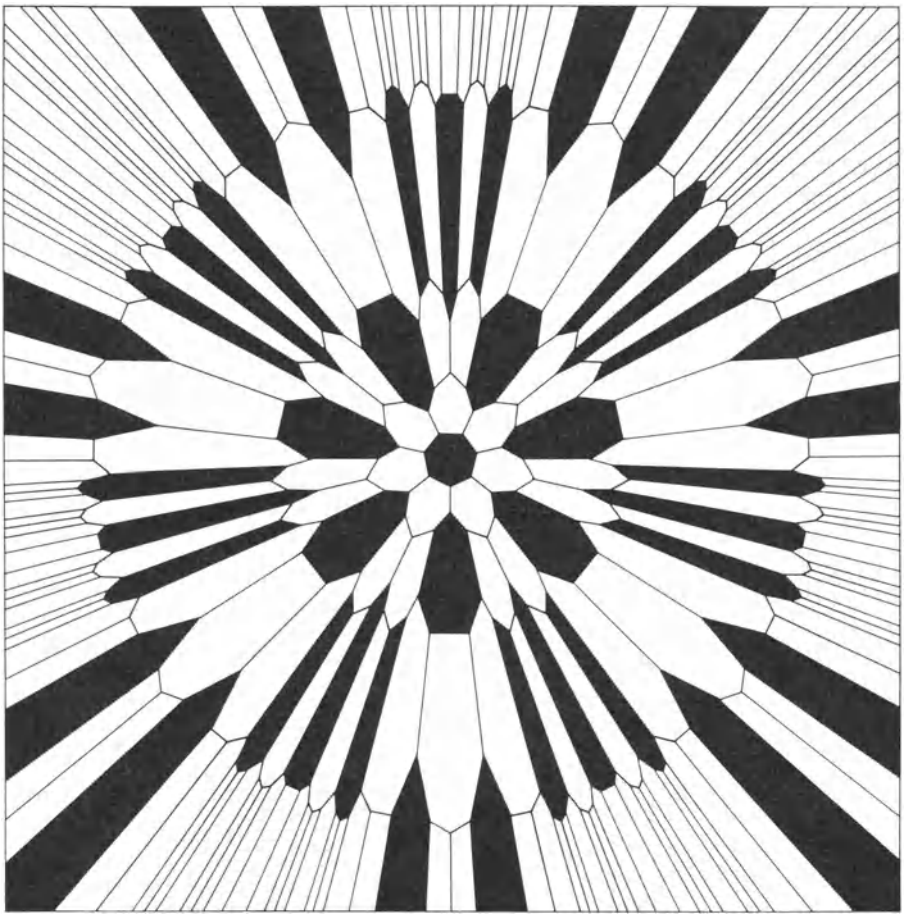


Bild 175 Eine Parkettierung mit konvexen Siebenecken

Mit den meisten, aber nicht mit allen 108 Heptominos (bezüglich ihrer Formen vergleiche man Solomon W. Golombs Buch „Polyominoos", Seite 108–109) kann man die Ebene überdecken. Verschiedene britische Mathematiker arbeiten an der schwierigen Frage, welche von ihnen dies *nicht* ermöglichen. Das entsprechende Problem für die 24 Heptiamonds (Bild 174) wurde von T. H. O'Beirne gestellt und in diesem Jahr von Gregory J. Bishop aus Boston gelöst. Nur mit einer der 24 Formen kann man die Ebene nicht ausfüllen. Kann der Leser diese finden und beweisen, daß damit keine Parkettierung der Ebene möglich ist?

Das Op-Muster, das die Ebene mit konvexen, nicht kongruenten Siebenecker überdeckt (Bild 175), stellt ein kurioses Paradoxon dar, das eher das Gehirn als die Augen ver-

wirrt. Wird das Muster unendlich oft wiederholt, wie groß ist der mittlere sich ergebende Winkel? Da die Ebene nichts außer Siebenecken enthält, und da die innere Winkelsumme in jedem Siebeneck 900 Grad ist, folgt, daß der mittlere Winkel 900/7 oder $128\frac{4}{7}$ Grad ist. Falls man jedoch beachtet, daß in jedem Punkt des Musters drei Winkel zusammentreffen, so ergibt sich offensichtlich, daß der mittlere Winkel 360/3 oder 120 Grad ist. Man erkläre dies!

Lösungen

Ist es Ihnen gelungen, einen geraden Schnitt so durch das kreisförmige Op-Muster (Bild 176 links) zu legen, daß es in zwei Teile zerfällt, die beide einem quadratischen Schachbrett topologisch äquivalent sind? Daß das Muster selbst nicht stetig verformt werden kann, um dadurch ein Schachbrett zu ergeben, folgt aus der Tatsache, daß die Anzahl seiner Zellen 392 ist, was keine Quadratzahl darstellt. Man beachte auch, daß die zwei Zellen im Zentrum dreiseitig sind; jede Verformung, die eine dieser Zellen in ein Quadrat überführt, würde die andere in eine nicht-konvexe Figur überführen. Der Schnitt muß daher notwendigerweise diese beiden Zellen trennen. Der einzige gerade Schnitt, der dies vollbringt, ist der horizontale Durchmesser des großen Kreises. Die Figur im Bild 176 Mitte ist topologisch gesehen der Figur links gleich. Man sieht leicht, daß ein einziger Schnitt entlang AB zwei Hälften ergibt, die beide einem quadratischen Schachbrett mit 14 Zellen je Seite topologisch äquivalent sind (Bild 176 rechts).

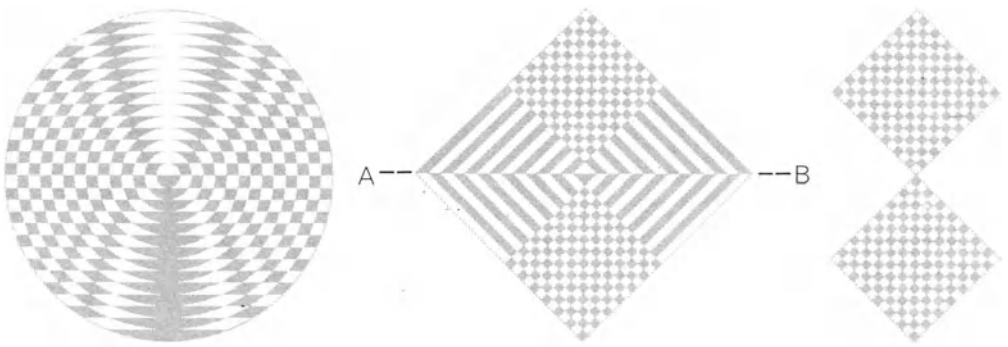


Bild 176 Die Lösung für das topologische Problem

Das einzige Heptiamond, das die Ebene nicht überdecken kann, ist die im Bild 177 a gezeigte V-förmige Figur. Der Beweis des Elektrotechnikstudenten Gregory J. Bishop von der Northeastern University ist einfach: Ein zweites Stück kann die gefärbte konkave Ausnehmung des ersten nur wie im Bild 177 b gezeigt ausfüllen. (Wir berücksichtigen das Spiegelbild des zweiten Stückes nicht.) Das gefärbte Dreieck beim zweiten Stück kann durch ein drittes nur wie im Bild 177 c gefüllt werden. Das gefärbte Dreieck bei dieser Figur kann durch ein viertes Stück wieder nur wie im Bild 177 d gefüllt werden; ähnliche Beschränkungen bezüglich der Anordnung gelten für die Stücke 5 und 6. Nun aber bleiben wir stecken. Es gibt keine Möglichkeit, das zu Stück 6 gehörige gefärbte Dreieck auszufüllen.

Die Anzahl der möglichen Parkettierungen für die anderen 23 Heptiamonds ist zu groß, um sie abzubilden. Der Leser hat unter Umständen schon den Trick herausgefunden, zwei Stück zu einem Paar zusammenzusetzen, um damit ein Muster zu formen, das die Ebene periodisch überdeckt. Beispielsweise können fünf verschiedene Heptiamonds paarweise zusammengesetzt werden, um dieselbe periodische Parkettierung zu ergeben.

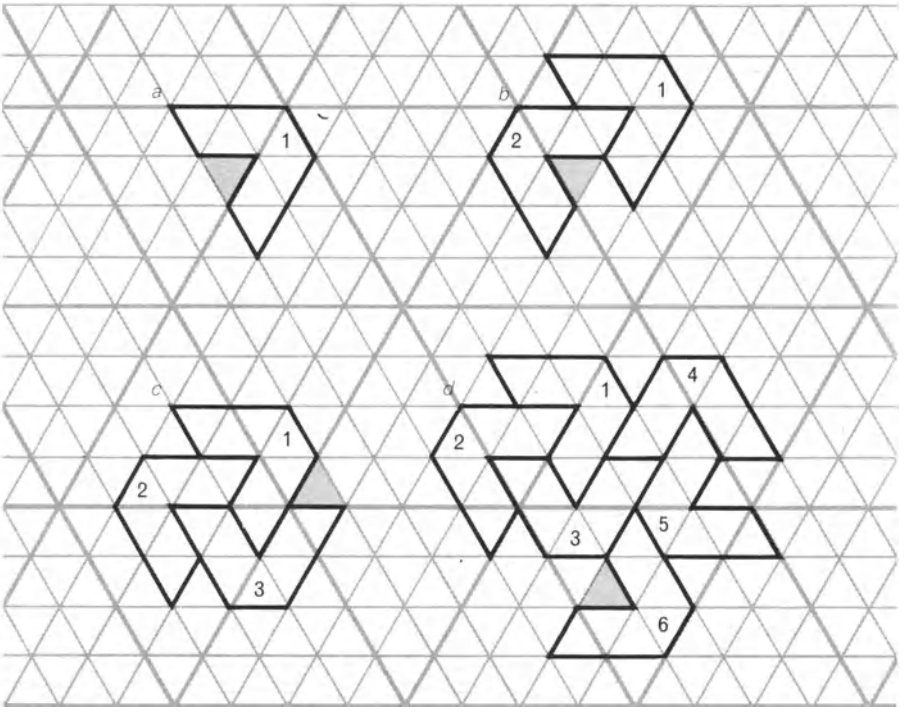


Bild 177 Der Beweis dafür, daß das V-Heptiamond die Ebene nicht überdecken kann

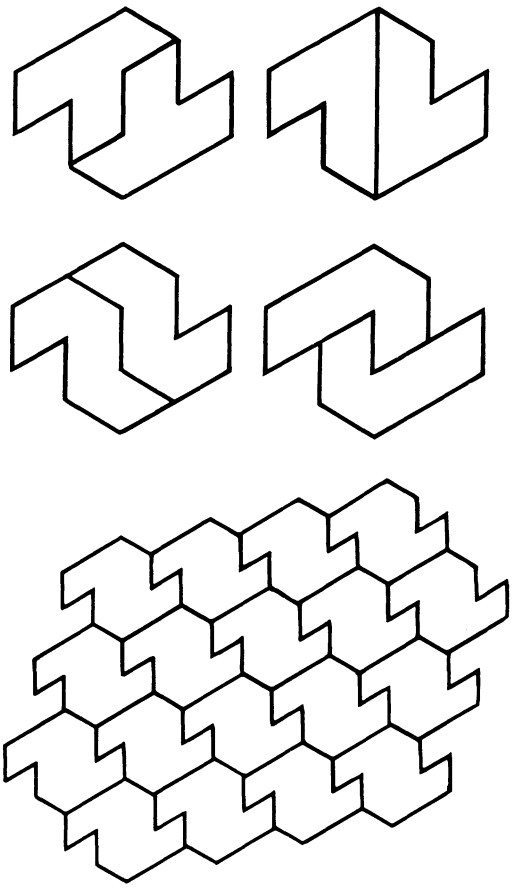


Bild 178
Parkettierungen mit vier Heptiamond-Paaren

(Bild 178 zeigt vier davon; kann der Leser das fünfte entdecken?) Bishop hat auch gezeigt, daß jedes der 66 Oktiamonds die Ebene überdeckt, und dies – mit Ausnahme von vier Formen – auch für alle der 108 Heptominos gilt.

Das Paradoxon für die Parkettierung mit Siebenecken stammt aus Hugo Steinhaus' "One Hundred Problems in Elementary Mathematics". Das Paradoxon ergibt sich aus der Tatsache, daß eine Änderung der Anordnung von Gliedern einer unendlichen Folge zu verschiedenen Mittelwerten für die Größe der Glieder führen kann. Steinhaus führt das Beispiel 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... an, das den Mittelwert 1/2 liefert. Die beiden unendlichen Mengen der Einser und Nullen können aber auch in der Form 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ... angeordnet werden (worin die aufeinanderfolgenden Mengen der Nullen die Quadrate von 1, 2, 3, ... als Kardinalzahlen haben); dies liefert den Mittelwert 0. Man kann leicht andere Anordnungen treffen, um dadurch dem mittleren Wert jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 1 zu erteilen. Beim Siebeneck-Muster werden zwei verschiedene Anordnungen der beiden unendlichen Mengen von Winkeln betrachtet und es liegt demnach kein Grund vor, warum die Berechnung des mittleren Winkels dabei jeweils denselben Wert liefern sollte.

24 Außerirdische Kommunikation

Über die Kluft des Alls hinweg betrachteten Geister, die zu unserem Geist in einem Verhältnis stehen wie unserer zu jenen der aussterbenden Bestien – Intelligenzen, gewaltig und kühl und unsympatisch –, unsere Erde mit mißgünstigen Blicken und lenkten langsam und sicher ihre Pläne gegen uns.

H. G. Wells, The War of the Worlds

Im Jahre 1898 – als Wells Roman erschien – glaubte eine Anzahl bekannter Astronomen ernstlich daran, daß der Mars von Geschöpfen mit „gewaltiger und kühler Intelligenz", die der unseren überlegen sei, bewohnt wäre. Der italienische Astronom Giovanni Schiaparelli (der Onkel der Modeschöpferin Elsa Schiaparelli) hatte 1877 berichtet, daß er feine Linien gesehen hatte, die den Roten Planeten kreuz und quer durchzogen. Der wohlhabende Percival Lowell wurde durch die fortwährenden Berichte Schiaparellis in solche Erregung versetzt, daß er sich entschloß, seine orientalischen Studien aufzugeben und Astronom zu werden. Als der Mars im Jahre 1894 der Erde ungewöhnlich nahe war, errichtete er sein eigenes Observatorium am "Mars Hill" in Flagstaff, Arizona.

Auch Lowell sah die Linien, die Schiaparelli "canali" nannte. Er sah sie sogar in phantastischer Fülle: Er zeichnete mehr als 500 auf. In drei Büchern – „Mars" (1895), "Mars and Its Canals" (1906) und "Mars as the Abode of Life" (1908) – argumentierte Lowell, daß die von ihm gesehenen Linien langgestreckte Vegetationsbänder seien, die enorme Bewässerungskanäle begrenzen, die Schmelzwasser von Polargipfeln in die trockenen Marswüsten bringen. „Daß der Mars von Lebewesen der einen oder anderen Art bewohnt ist, können wir als ebenso sicher annehmen, wie es ungewiß ist, welcher Art diese Wesen sind", schrieb Lowell. Lowells Marsbücher hatten einen ungeheuren Einfluß auf die frühe Science Fiction; überall tauchten die Kanäle auf, von Wells kurzer Geschichte "The Crystal Egg" (1897) bis zu den späteren Marsromanen von Edgar Rice Burroughs.

Es gibt keinen Zweifel über Lowells Fähigkeiten als Astronom. Berechnungen, die er 1915 angestellt hatte, führten 1930 zur Entdeckung des Pluto durch Clyde W. Tombaugh – am Lowell-Observatorium. („Pluto" wurde als Name für den Planeten gewählt, weil seine ersten beiden Buchstaben Lowells Initialen und die letzten beiden Tombaughs Anfangsbuchstaben ergeben; Plutos Symbol ♇ vereinigt P und L.) Aber wie Jonathan Norton Leonard in seinem Buch "Flight into Space" feststellte, lag Lowells Temperament näher dem seiner Schwester, der zigarrenrauchenden Schriftstellerin, als dem seines vorsichtigen konservativen Bruders Abbott Lawrence, der später Präsident von Harvard wurde. Obwohl einige Astronomen Lowells Beobachtungen der Marskanäle enthusiastisch bestätigten, konnten andere mit besseren Teleskopen und besseren Augen überhaupt keine Kanäle sehen. Sogar in den besten heutigen Teleskopen erscheint der Mars als ein klei-

ner, wackelnder Lichtfleck, und während der seltenen, kurzen Augenblicke, in denen das Bild stillsteht, kann einem die Einbildung seltsame Streiche spielen. Photographien nützen nichts, da die unruhige Atmosphäre der Erde das Bild verschmiert.

Die übereinstimmende Meinung unter den heutigen Astronomen ist, daß Schiaparelli, Lowell und ihre Anhänger Opfer optischer Sinnestäuschungen waren, hervorgerufen durch unregelmäßige Flecken am Roten Planeten und vervollkommnet durch Astigmatismus und psychologischen Selbstbetrug.

Unter den wenigen lebenden Wissenschaftlern, die Lowells Spekulationen noch immer ernst nehmen, ist Wells Allan Webb, ein Chemiker als Kalifornien, der Bekannteste. In seinem Buch "Mars, the New Frontier: Lowells Hypothesis" (1956) und in vielen Zeitungsartikeln und Vorträgen hat er über eine interessante topologische Analyse der von Lowell und einem seiner führenden Verfechter, Robert J. Trumpler, angefertigten Skizzen der Kanäle berichtet. Indem er die Karten dieser beiden Astronomen als geometrische Netzwerke betrachtete, bestimmte Webb den Prozentanteil jener Ecken, an denen drei, vier, fünf, sechs, sieben oder acht Strahlen zusammenliefern. Auf den Karten beider Männer sind die Ecken der Ordnung vier (vier Linien treffen sich in diesem Punkt) vorherrschend: sie stellen 43 Prozent der Ecken auf Trumplers Karten und über 55 Prozent auf denen Lowells dar. Eine ähnliche Analyse von in der Natur auftretenden Netzwerken – Risse im Schlamm, Schrumpfsprünge von glasiertem Porzellan, Risse in alten Lavabetten, Flüssen usw. – zeigte, daß hier Ecken der Ordnung drei überwiegen. Nur bei Netzwerken, die von Lebewesen angefertigt wurden, wie bei Spinnennetzen und Wildspuren, fand Webb, daß die Punkte 4. Ordnung dominierten. Diejenigen Netzwerke, die den Lowell-Trumpler-Karten topologisch am ähnlichsten sind, sind solche, die vom Menschen geschaffen wurden – wie Eisenbahnlinien und Luftfahrtrouten. So stützt – argumentiert Webb – die Topologie Lowells intuitive Überzeugung, daß die Kanäle die Arbeit von intelligenten Wesen sein müssen.

Webbs Argument setzt natürlich eine Übereinstimmung zwischen der Marsoberfläche und den Lowell-Trumpler-Karten voraus. Sind diese Karten aber nicht mehr als ein Gekritzel dessen, was Lowell und Trumpler zu sehen glaubten, so ist ihre topologische Ähnlichkeit mit Eisenbahnlinien leicht zu verstehen. Während der Abfassung dieses Artikels wurden die ersten Fernsehbilder vom Mars bereits von *Mariner IV* empfangen, aber sie haben noch nicht bestätigt, ob am Planeten solche Linien existieren oder nicht. Gewiß erwarten wenige Astronomen, daß diese Bilder irgend etwas ähnliches wie Lowells Netze zeigen werden. Sollten sie dies jedoch, so wird die große „Kanaldiskussion" aber sicherlich wieder ausbrechen.

Zwischen 1880 und 1925, als das Interesse an den Marskanälen groß war, wurden alle möglichen Vorschläge gemacht, um Kontakt mit Marsmenschen aufzunehmen. Zwei häufige Vorschläge waren: Eine leistungsfähige Lichtquelle zu bauen, die eine codierte Nachricht blinken sollte oder eine Kette von hellen Lichtern über eine ausgedehnte Fläche zu errichten (für ein Marsteleskop sichtbar), um ein Diagramm des Pythagoreischen Theorems zu formen. Viele Diskussionen gab es über Funkkontakte: Eine Folge von Piepstönen zu senden, die die ganzen Zahlen darstellen sollten (pieps; pieps, pieps; pieps, pieps, pieps; ...) oder solche arithmetische Trivialitäten wie zwei plus zwei ist vier. 1900 erklärte Nikola Tesla, daß er Funksignale von intelligenten Wesen am Mars erhalten hatte. 21 Jah-

re später machte Guglielmo Marconi eine ähnliche Ankündigung. Auch Spiritualisten hatten häufigen Kontakt mit Wesen auf dem Roten Planeten. Die bemerkswerteste war Helene Smith, ein Schweizer Medium, deren seltsame Geschichte in dem Buch „From India to the Planet Mars: A Study of a Case of Somnambulism with Glossolalia" (1900) des Schweizer Psychologen Theodore Flournoy erzählt wird. In Trance schien Helene vom Mars aus unter Kontrolle zu sein, sie sprach und schrieb eine komplexe Marssprache, mit einem völlig eigenen Alphabet. (Über Helene und andere Medien, die behaupteten, Kontakte zum Mars zu haben, lese man auch das Kapitel 8 "From Kensington to the Planet Mars" in Henry Prices „Confessions of a Ghost Hunter"; New York; Putnam, 1936).

Nun da wir nahe daran sind, Forschungsroboter am Mars zu landen[1] und dabei erwarten, höchstens niedriges Leben vorzufinden, haben sich die Interessen an außerirdischer Kommunikation den Planeten in anderen Sonnensystemen zugewendet. 1960 konnte das Projekt Ozma keinerlei Funkmeldungen aus dem Raum entdecken, nachdem man mehrere Monate lang nahe den Frequenzen des freien Wasserstoffs zu empfangen versucht hatte. (Aus verschiedenen Gründen scheint diese Frequenz mit einer Wellenlänge von 21 Zentimetern die ideale Frequenz für zwischenplanetare Kommunikation zu sein.) Trotzdem bleibt das Interesse am Senden und Suchen nach solchen Botschaften bestehen, und eine Menge intensiver Arbeit über die beste Art des Informationsaustausches mit fremden Kulturen wird getan werden, sollte erst der Kontakt einmal geschaffen worden sein. Es ist dies ein faszinierendes Problem, beinahe das Gegenteil zum Ersinnen von Codes während des Krieges. Der Zweck eines Codes ist es, Informationen in solcher Weise zu senden, daß es demjenigen, der den Schlüssel nicht kennt, so schwer als möglich fällt, die Botschaft zu verstehen. Ein interplanetarer Code dagegen hat den Zweck, sich mit Wesen zu verständen, die keine Ahnung von unserer Sprache haben und ihnen das Verstehen so einfach wie möglich zu machen.

Viele Aufsätze in „Interstellar Communication", herausgegeben von A. G. W. Cameron (1963), beschäftigen sich mit diesem Problemkreis. Alle Experten sind übereinstimmend der Meinung, daß die Botschaften am besten mit einfacher Arithmetik beginnen sollten. Man nimmt an, daß von allen Arten intelligenter Lebewesen Einheiten gezählt werden können und daß die arithmetischen Gesetze in der gesamten Milchstraße dieselben sind. Natürlich kann man nicht annehmen, daß irgend eine vorgegebene Methode, Zahlen zu symbolisieren – wie beispielsweise unsere auf der 10 basierende Dezimalmethode – universell sein könnte. Es wäre zum Beispiel töricht, außerirdische Aufmerksamkeit durch das Funken einer Dezimalentwicklung von π erregen zu wollen; die fremden Wesen könnten ein anderes Basissystem verwenden und unser π wäre für sie vorerst nur eine Folge willkürlicher Symbole. Hans Freudenthal, ein holländischer Mathematiker, hat eine sorgfältig ausgearbeitete künstliche Sprache entwickelt, die er "Lincos" nennt (für "lingua cosmica"), die mit Arithmetik und einfacher Logik startet, zu fortgeschrittener Mathematik weiterschreitet und schließlich dazu fähig ist, das gesamte menschliche Wissen zu übermitteln. Der erste Band seines Werkes, "Lincos: Design of a Language for Cosmic Intercourse" wurde 1960 in den Niederlanden veröffentlicht.

---

1 Siehe hierzu u.a. Horst W. Köhler, „Der Mars. Bericht über einen Nachbarplaneten". Vieweg Braunschweig/Wiesbaden 1978.

Der größte Teil der von Freudenthal gemachten Anstrengungen könnte durch die einfache Möglichkeit unwichtig werden, Bilder mit Hilfe eines einfachen Codes von zwei Signalen zu übertragen. Es ist dabei nicht erforderlich, daß die Lebewesen, die so einen Code empfangen, Augen haben, die auf Licht ansprechen, sondern nur, daß sie einen Sinn dafür haben, die Formen von Dingen irgendwie zu erfassen. Unsere sichtbaren Bilder könnten von ihnen in diejenige Empfindungsform übersetzt werden, die für sie die beste Art darstellt, die Welt zu beobachten. Die vielleicht beste Art, eine Form zu senden, wird durch eine Zwei-Symbol-Übertragung dargestellt, die Anleitungen für die Abtastung einer rechteckigen Matrix von Zellen gibt. Ein Symbol zeigt dabei an, daß die Zelle gefüllt ist, das andere, daß sie leer ist. Dies ist einfach die Technik, durch die jetzt Bilder über Funk übertragen werden und stellt auch die Grundlage der Abtastung eines Fernsehschirms dar.

Man betrachte die aus 100 Symbolen bestehende Mitteilung

0000000111
1111111101
1110000111
1010000000
0000000000
1010110101
1010100101
1100110111
1010100010
1010110010.

Die 100 Symbole deuten die im Bild 179 gezeigte 10 X 10-Matrix an. Tastet der Leser die Zellen von links nach rechts, von oben nach unten abund färbt dabei jede durch 1 bezeichnete Zelle, so erhält er ein Bild eines bekannten Gegenstandes und das englische Wort dafür. Es ist leicht einzusehen, daß die Einfachheit der Kommunikation sprunghaft ansteigt, wenn erst das Prinzip der Bildabtastung erfaßt ist.

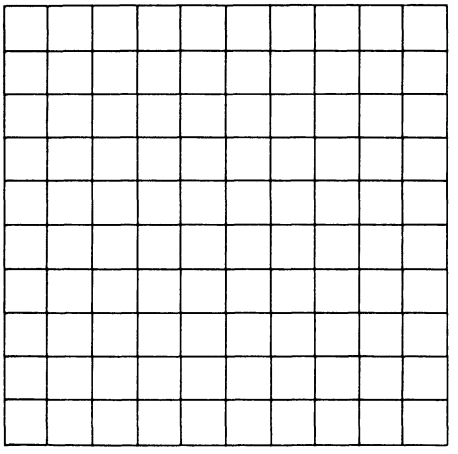


Bild 179
10 X 10 Matrix

Da es hunderte oder tausende Jahre dauern könnte, bis eine Botschaft der Erde auf einem Planeten eines anderen Sonnensystems ankommt, ist es offensichtlich nicht möglich, wie am Telephon hin und zurück zu plauschen. Die Botschaften müßten mit etwas beginnen, das die Aufmerksamkeit erregt – den ganzen Zahlen oder einer Folge von Primzahlen –, gefolgt von einfacher Arithmetik, die schnell zur Bildabtastung führt; schließlich sollte eine enzyklopädische Übertragung von Information erfolgen. Hier ergibt sich eine seltsame Situation. Man möchte annehmen, daß die einfachsten zu sendenden Kenntnisse Dinge betreffen würden, die die Physiker "Observable" nennen – Information, die uns unsere Sinne liefern, oft noch von relativ einfachen Beobachtungsinstrumenten wie Teleskop oder Mikroskop unterstützt. Aber nehmen wir an, daß die Wesen am Planeten *X* als den am höchsten entwickelten Sinn eine Darstellungsart der Welt besitzen, die die Evolution bei uns nicht entwickelt hat – beispielsweise magnetische Kräfte oder eine Art von Strahlung, die uns noch unbekannt ist. Unsere Bilder der Welt, die wir von unseren Observablen haben, könnten am Planeten *X* weniger Sinn haben als Informationen über so „unbeobachtbare" Dinge wie Elektronen, Protonen oder Neutronen. Wenn dem so ist, dann könnten die Bewohner des Planeten *X* eher eine Beschreibung des Periodischen Systems der Elemente verstehen als die eines Hauses oder Baumes. Von einem Standpunkt aus gesehen sind die Farben, Formen und Töne unserer Welt die grundlegenden Fakten und das Elektron ist eine vage Abstraktion. Das hier auftauchende Problem deutet auf das Gegenteilige hin. Die mathematische Struktur eines Heliumatoms könnte universeller zu verstehen sein als die Farbe, der Geruch, der Geschmack und die Form eines Apfels; nicht allein deshalb, weil es unwahrscheinlich ist, daß Äpfel auf anderen Planeten wachsen, sondern weil andere Wesen ihre Welt mit Sinnen abbilden könnten, die wenig mit sehen, riechen, schmecken und tasten gemeinsam haben. Dinge wie Elementarteilchen und elektromagnetische Felder könnten von außerirdischen Wesen leichter verstanden werden als die bekannten Bilder und Laute unserer Welt.

1960 las Ivan Bell, ein Engländer, der in Tokio Englisch unterrichtete, über die Pläne des Projekts Ozma. Um seine Freunde zu amüsieren, entwarf er eine einfache interplanetare Botschaft, die aus 24 Symbolen bestand. Sie wurde am 22. Januar 1960 in "The Japan Times" gedruckt. Dazu wurden die Leser gefragt, ob sie sie entschlüsseln könnten. Es kamen vier vollständige Lösungen. Eine stammte von Mrs. Richard T. Field, die nun in Bridgeton, New Jersey, lebt und die mir eine Photokopie von Bells Artikel sandte.

Bells Botschaft wird im Bild 180 wiedergegeben. Sie ist viel einfacher zu entziffern, als es den Anschein hat, und die Leser werden dringend aufgefordert, dies zu versuchen. Die Buchstaben A bis Z (wobei O und X ausgelassen werden) stellen die 24 Symbole dar. (Jedes Symbol wird vermutlich durch eine Kombination von Piepstönen gesendet, aber wir brauchen uns hier nicht mit diesen Details zu beschäftigen.) Die Satzzeichen sind nicht Teile der Botschaft, sondern markieren Zeitspannen. Aufeinanderfolgende Buchstaben werden mit kurzen dazwischenliegenden Pausen gesendet. Ein Zwischenraum zwischen Buchstaben bedeutet eine längere Pause. Kommas, Semikolons und Punkte stellen in dieser Reihenfolge längere Pausen dar. Die längsten Zeitspannen liegen zwischen den Abschnitten, die zur Hilfe für den Leser durchnumeriert sind; die Zahlen gehören nicht zur Botschaft. Für Wesen in einem beliebigen Sonnensystem sollte die Botschaft sonnenklar sein – mit Ausnahme des letzten Abschnittes, der etwas unklar ist. Auch wenn er

1. A. B. C. D. E. F. G. H. I. J. K. L. M. N. P. Q. R. S. T. U. V. W. Y. Z.

2. A A, B; A A A, C; A A A A, D; A A A A A, E; A A A A A A, F; A A A A A A A, G; A A A A A A A A, H; A A A A A A A A A, I; A A A A A A A A A A, J.

3. A K A L B; A K A K A L C; A K A K A K A L D. A K A L B; B K A L C; C K A L D; D K A L E. B K E L G; G L E K B. F K D L J; J L F K D.

4. C M A L B; D M A L C; I M G L B.

5. C K N L C; H K N L H. D M D L N; E M E L N.

6. J L AN; J K A L AA; J K B L AB; AA K A L AB. J K J L BN; J K J K J L CN. FN K G L FG.

7. B P C L F; E P B L J; F P J L FN.

8. F Q B L C; J Q B L E; FN Q F L J.

9. C R B L I; B R E L CB.

10. J P J L J R B L S L ANN; J P J P J L J R C L T L ANNN. J P S L T; J P T L J R D.

11. A Q J L U; U Q J L A Q S L V.

12. U L WA; U P B L WB; AWD M A L WD L D P U. V L WNA; V P C L WNC. V Q J L WNNA; V Q S L WNNNA. J P EWFGH L EFWGH; S P EWFGH L EFGWH.

13. GIWIH Y HN; T K C Y T. Z Y CWADAF.

14. D P Z P WNNIB R C Q C.

Bild 180 Ivan Bells interplanetare Botschaft

richtig entschlüsselt wird, so kann er nur von Bewohnern eines Planeten unseres Sonnensystems voll verstanden werden. (Mrs. Field schrieb ihre Lösung in demselben Code und schloß mit der Bemerkung – in diesem Code – daß sie auf dem Jupiter lebe). Den Schlüssel für Bells Botschaft sowie eine vollständige Übersetzung findet man im Lösungsteil.

Nachtrag

Der folgende Briefwechsel, der durch meinen Artikel über das vorangegangene Thema ausgelöst wurde, wurde in der Spalte für Leserbriefe von "Scientific American", Januar 1966, abgedruckt:

Werte Herren!

Ich lehne einige der von Martin Gardner in der "Mathematical Games"-Sektion ihrer Augustausgabe (1965) gemachten Aussagen auf das schärfste ab.

Es mag recht elegant scheinen, die Marskanäle der Illusion zuzuschreiben. Leute, die sich einer solchen Ansicht anschließen, haben wenig oder gar keine Erfahrung in der tatsächlichen Beobachtung planetarischer Details. Es sind einige Beobachtungsparameter nötig, um die feinen Unterteilungen der Saturnringe, die komplizierten „Girlanden" des Jupiter, die Kanäle und Oasen des Mars und die winzigen Spalten und Krater des Mondes zu sehen.

Gardner schreibt: „Obwohl einige Astronomen (Percival) Lowells Beobachtungen der Marskanäle enthusiastisch bestätigten, konnten andere mit besseren Teleskopen und besseren Augen überhaupt keine Kanäle sehen." Der letzte Teil dieser Aussage ist nicht korrekt. Die Hartmann-Tests und die optische Leistung des 24-inch-Refraktors Lowells und des 36-inch-Refraktors Licks zeigen, daß diese Teleskope von außerordentlicher optischer Qualität sind. Ich habe einige hundert Stunden damit verbracht, den Mond und die Planeten mit dem Lowellschen 24-inch-Refraktor zu beobachten. Nur während der seltensten Augenblicke – in denen nicht die Turbulenz unserer eigenen Atmosphäre störend wirkt – sind die feinsten aufgezeichneten Details sichtbar. Ich würde schätzen, daß eine solche Sehqualität während weniger als 0,01 Prozent der Zeit möglich ist, die man mit Beobachtungen verbringt. Wie groß sind also die Chancen eines Astronomen, sehr feine planetarische Details zu sehen, wenn er einen Planeten für einige Minuten betrachtet, bevor er sein nächtliches Beobachtungsprogramm beginnt?

Der verstorbene Dr. Robert Trumpler vom Lick-Observatorium zweifelte in jüngeren Jahren an der Existenz der Marskanäle. Dann entschloß er sich, den Mars während der „Opposition" im Jahre 1942 sorgfältig zu betrachten. Er sah und zeichnete eine grosse Anzahl von Kanälen auf, wie durch seine Marskarten bestätigt wird. Dr. E. C. Slipher hatte ebenfalls scharfe Augen und sah gut.

Feine planetarische Details zu sehen, lernt man dadurch, daß man viel durch ein gutes Teleskop schaut und nicht dadurch, daß man in einem Lehnstuhl in einem warmen Büro sitzt. Jemand mit normaler Sehschärfe kann die Kanäle erkennen, wenn die Sicht außerordentlich gut ist – vorausgesetzt, daß die optischen Parameter des Teleskops in Ordnung sind. Jemand der eine große Blende mit zu geringer Vergrößerungskraft verwendet, erhält ein blendend leuchtendes Bild. Dieses überflutet feine dunkle Details auf Grund der grellen Ausstrahlung der überhellen Umgebung des Planeten.

Aller Wahrscheinlichkeit nach sind die Kanäle unzusammenhängende dunkle Flekken in einer Linie. Meine Studien des Mars deuten an, daß die Kanäle Fehler in der Kruste sind und dort unterbrochen sind, wo Staub Teile von ihnen verdeckt hat. Die Ränder der winkeligen Meere fluchten genau mit Kanälen, die über hunderte von Meilen durch

die Marswüsten auf dunkle Flecken zulaufen, die „Oasen" genannt werden und wahrscheinlich große Krater sind (siehe "The Astronomical Journal", Oktober 1950, Seite 184).

Gewisse Teile der Kanäle sind auf einigen Bildern von *Mariner IV* sichtbar. Man kann Wahrheit nicht durch eine Volksabstimmung ermitteln, da nur wenige die schwierige Technik des Betrachtens feiner planetarischer Details durch viel Geduld und Erfahrung erlernen. Die größeren Kanäle sind auch auf Photographien festgehalten. Man löst ein wissenschaftliches Problem nicht dadurch, daß man es sich einfach aus der Welt wünscht.

Clyde W. Tombaugh

Observatory
New Mexico State University
University Park, New Mexico

Werte Herren!

Die Kontroverse unter den Astronomen – zwischen der kleinen Minderheit, die berichtet, am Mars gerade Linien zu sehen und der Mehrheit, die nicht in der Lage gewesen ist, diese zu sehen – ist schon immer äußerst heftig gewesen und bis heute nicht zur Ruhe gekommen. „Die einzig mögliche Erklärung für diese Differenzen ist", schrieb der große britische Astronom H. Spencer Jones in seinem "Life on Other Worlds", „daß die Beobachtung dieser feinen, schwer zu erfassenden Details von komplexen Unterschieden der Personen abhängt ... Unterbewußte Interpretationen dessen, was flüchtig erblickt wird, können für zwei verschiedene Personen sehr unterschiedlich sein. Das Auge des einen kann dazu neigen, die Lücken zwischen feinen Details zu schließen und eine gleichmäßige, gerade, stetige Linie zu zeichnen – außer er kann völlig klar erkennen, daß es Unregelmässigkeiten, Biegungen und Unterbrechungen gibt. Ein anderer wird dies nur tun, wenn es für ihn über jeden Zweifel erhaben ist, daß die Linie gleichmäßig, gerade und stetig ist." Jones zitiert ein Experiment, bei dem Punkte, verwischte Flecken und kurze Linien völlig beliebig auf ein Blatt Papier gezeichnet wurden; eine Klasse von Schulkindern wurde gebeten, aufzuzeichnen, was sie sahen. Viele der Kinder, speziell jene in den rückwärtigen Bänken, verbanden die auffallenden Stellen durch gerade Linien.

Einer der stärksten Hinweise darauf, daß Giovanni Schiaparelli und Percival Lowell (die ersten beiden, die Karten der „Marskanäle" anfertigten) Opfer optischer Täuschungen waren, ist, daß beide von einer unerklärlichen „Verdoppelung" der Kanäle berichteten. Während der Dauer eines Tages, oder auch nur Stunden, wurden gewisse Kanäle geheimnisvoll und vorübergehend in zwei parallele Linien umgewandelt. Lowell berichtete, daß er hunderte solcher Fälle gesehen hatte, obwohl zu dieser Zeit darauf hingewiesen wurde, daß die Entfernungen zwischen den Paaren paralleler Linien am Mars viel zu klein für die Auflösekraft der von ihm benutzten Linsen gewesen sei.

Dr. Tombaughs gemäßigte Ansicht, daß es am Mars lineare Strukturen gibt und diese Fehler in der Kruste seien, die Krater verbinden, ist ähnlich einer von Alfred Russel Wallace weitblickend in dem faszinierenden und vielleicht prophetischen kleinen Buch "Is Mars Inhabitable?" (London, 1907) geäußerten Meinung. Wallace stimmte mit der Ansicht Lowells, daß die Kanäle das Werk intelligenter Wesen seien, nicht überein. Obwohl er die Existenz der Kanäle nicht in Frage stellte, schloß er, daß der Mars nicht nur unbewohnt, sondern „völlig unbewohnbar" sei. Er argumentierte, daß der Mars so schwer

mit Meteoren beschossen worden war, daß seine Oberfläche davon schmolz. Während der Abkühlung des Planeten fielen die Meteore weiter auf ihn herab und verursachten weitere Krater, die schwache Stellen in der Kruste ergaben. Beim weiteren Abkühlen und Schrumpfen der Kruste sprang diese entlang gerader Linien auf, die diese Krater verbanden.

Innerhalb der nächsten Jahre könnten wir es genau erfahren, in welchem Ausmaß es lineare Formen auf der Marsoberfläche gibt; die Kontroverse könnte allerdings als ein nebuloser semantischer Streit darüber fortgesetzt werden, was als „linear" zu bezeichnen ist. Meiner Meinung nach sollte das Wort „Kanal" für die langen, scharfen, extrem geraden, strichförmigen Linien reserviert bleiben, die von Schiaparelli, Lowell, Trumpler und anderen aufgezeichnet wurden und nicht für die auf einigen Photographien zu sehenden breiten, verschwommenen, unregelmäßigen Zeichnungen verwendet werden.

Martin Gardner

Lösungen

Der Schlüssel für die 24 Symbole in Ivan Bells interplanetarer Botschaft wird im Bild 181 gezeigt. Die Botschaft ergibt folgende Übersetzung:

1. (Dies gibt einfach die 24 Symbole an.)
2. (Dies setzt die ersten zehn Symbole (A bis J) den Zahlen 1 bis 10 gleich.)
3. (Symbole für „plus" und „ist gleich" werden eingeführt.) $1 + 1 = 2$; $1 + 1 + 1 = 3$; $1 + 1 + 1 + 1 = 4$. $1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 1 = 4$; $4 + 1 = 5$. $2 + 5 = 7$; $7 = 5 + 2$. $6 + 4 = 10$; $10 = 6 + 4$.
4. (Das Minuszeichen wird eingeführt.) $3 - 1 = 2$; $4 - 1 = 3$; $9 - 7 = 2$.
5. (Die Null wird eingeführt.) $3 + 0 = 3$; $8 + 0 = 8$. $4 - 4 = 0$; $5 - 5 = 0$.
6. (Die Dezimaldarstellung, basierend auf der Zahl 10 wird eingeführt. J = AN übersetzt J in die Dezimaldarstellung 10.) $10 + 1 = 11$; $10 + 2 = 12$; $11 + 1 = 12$. $10 + 10 = 20$; $10 + 10 + 10 = 30$. $60 + 7 = 67$.
7. (Das Multiplikationssymbol wird eingeführt.) $2 \times 3 = 6$; $5 \times 2 = 10$; $6 \times 10 = 60$.
8. (Das Divisionssymbol wird eingeführt.) $6 \div 2 = 3$; $10 \div 2 = 5$; $60 \div 6 = 10$.
9. (Exponenten werden eingeführt.) $3^2 = 9$; $2^5 = 32$.
10. (Symbole für 100 und 1000 werden eingeführt.) $10 \times 10 = 10^2 = S = 100$; $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = T = 1000$. $10 \times 100 = 1000$; $10 \times 1000 = 10^4$.
11. (Symbole für 1/10 und 1/100 werden eingeführt.) $1 \div 10 = 1/10$; $1/10 \div 10 = 1 \div 100 = 1/100$.
12. (Das Dezimalzeichen wird eingeführt.) $1/10 = .1$; $1/10 \times 2 = .2$; $1.4 - 1 = .4 = 4 \times 1/10$. $1/100 = .01$; $1/100 \times 3 = .03$. $1/100 \div 10 = .001$; $1/100 \div 100 = .0001$. $10 \times 5.678 = 56.78$; $100 \times 5.678 = 567.8$.
13. (Das Zeichen für „angenähert gleich" wird eingeführt.) $79.98 \cong 80$; $1000 + 3 \cong 1000$. (Das Zeichen für π wird eingeführt.) $\pi \cong 3.1416$.
14. $\dfrac{4 \times \pi \times .0092^3}{3}$.

Die letzte Aussage ist die Formel für das Volumen einer Kugel mit dem Radius 0,0092. Als Bell die Lösung dieser Botschaft angab ("Japan Times", 29. Januar 1960), gab er zu, daß hier eine Unklarheit vorliegt, die nur durch eine vorausgehende Information über die Verwendung von Klammern oder über die Reihenfolge, in der arithmetische Operationen auszuführen sind, vermieden hätte werden können. Die Formel läßt darauf schließen, daß eine konkrete Kugel beschrieben wird. Falls die Empfänger der Botschaft in unserem Sonnensystem leben, so müßten sie eigentlich clever genug sein, zu schließen, daß der Radius der Sonne die Einheitslänge darstellt und der Radius des drittnächsten Planeten zur Sonne 0,0092 mal dem Sonnenradius ist. Der Ausdruck ergibt daher das Volumen der Erde und zeigt den Ursprung der Botschaft an.

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5
F 6
G 7
H 8
I 9
J 10
K +
L =
M −
N 0
P x
Q ÷
R to the power of
S 100
T 1,000
U 1/10
V 1/100
W . [decimal point]
Y = [is approximately equal to]
Z π [pi]

Bild 181 Schlüssel zur interplanetaren Botschaft

Literatur

1

Design in Nature. Vol. II. J. Bell Pettigrew. London: Longmans, Green, and Co., 1908.

The Curves of Life. Theodore Andrea Cook. New York: Henry Holt, 1914.

Introduction to Geometry. H. S. M. Coxeter. New York: John Wiley and Sons, 1961.

The Double Helix. James D. Watson. New York: Atheneum, 1968.

2

"Topology". Albert W. Tucker and Herbert S. Bailey, Jr. *Scientific American*, Vol. 182, No. 1; January, 1950. Pages 18–24.

Elementary Point Set Topology. R. H. Bing. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 67, No. 7; August-September, 1960. Special Supplement.

Intuitive Concepts in Elementary Topology. Bradford Henry Arnold. New York: Prentice-Hall, 1962.

Experiments in Topology. Stephen Barr. New York: Thomas Y. Crowell, 1964.

Visual Topology. W. Lietzmann. London: Chatto and Windus, 1965.

The Four-Color Problem. Oystein Ore. New York: Academic Press, 1967.

3

Combinatorial Analysis. Percy A. MacMahon. Cambridge: Cambridge University Press, Vol. 1, 1915; Vol. 2, 1916. (Reprint [2 vols. in one]. Bronx, N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1960.)

An Introduction to Combinatorial Analysis. John Riordan. New York: John Wiley and Sons, 1958.

Combinatorial Mathematics. Herbert John Ryser. New York: John Wiley and Sons, 1963.

Applied Combinatorial Mathematics. Frank Harary. New York: John Wiley and Sons, 1964.

Combinatorial Theory. Marshall Hall, Jr. Waltham, Mass.: Blaisdell Publishing Co., 1967.

Elementary Combinatorial Analysis. Martin Eisen. New York: Gordon and Breach, 1969.

4

"A Graphical Method of Solving Tartaglian Measuring Puzzles." M. C. K. Tweedie. *The Mathematical Gazette*, Vol. 23, No. 255; July, 1939. Pages 278–282.

"A Billiard Ball Computer." Aaron Bakst. In his *Mathematical Puzzles and Pastimes*. New York: Van Nostrand Co., 1954. Chapter 2, Pages 10–21.

"Pouring Problems: The Robot Method." Nathan Altshiller Court. In his *Mathematics in Fun and in Earnest*. New York: Dial Press, 1958. Pages 223–231.

Graphs and Their Uses. Oystein Ore. New York: Random House, 1963. Pages 68–70.

"Billiard Balls in an Equilateral Triangle." Donald E. Knuth. *Recreational Mathematics Magazine*, No. 14; January, 1964. Pages 20–23.

Puzzles and Paradoxes. T. H. O'Beirne. New York: Oxford University Press, 1965. Chapter 4.

Mathematics on Vacation. Joseph S. Madachy. New York: Charles Scribner's Sons, 1966. Pages 231–241.

Geometry Revisited. H. S. M. Coxeter. New York: Random House, 1967. Pages 89–93.

Algorithms, Graphs, and Computers. Richard Bellman, Kenneth L. Cooke, and Jo Ann Lockett. New York: Academic Press, 1970. Chapter 5.

5

Games Ancient and Oriental and How to Play Them. Edward Falkener. London: Longmans, Green and Co., 1892. (Reprint. New York: Dover, 1961.)

A History of Board-Games Other than Chess. H. J. R. Murray. New York: Oxford Unviersity Press, 1952.

Board and Table Games from Many Civilizations. R. C. Bell. New York: Oxford University Press, Vol. 1, 1960; Vol. 2, 1969.

A Gamut of Games. Sidney Sackson. New York: Random House, 1969.

7

Mathematical Recreations and Essays. W. W. Rouse Ball. New York: The Macmillan Co., 1960. Pages 299–303.

Mathematical Puzzles and Other Brain Twisters. Anthony S. Filipiak. New York: A. S. Barnes and Co., 1964. Pages 1–18.

8

Informal Deduction in Algebra: Properties of Odd and Even Numbers. Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board, Princeton, N.J., 1959.

"Parity." Charles J. Goebel. In *McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology*. Vol. 9. New York: McGraw-Hill, 1960. Pages 565–567.

Mathematics: The Man-made Universe. 2nd Edition. Sherman K. Stein. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1969. Chapters 1 and 2.

9

"Magic Squares Made with Prime Numbers to Have the Lowest Possible Summations." W. S. Andrews and Harry A. Sayles. *The Monist*, Vol. 23, No. 4; October, 1913. Pages 623–630.

History of the Theory of Numbers: Volume 1. Leonard Eugene Dickson. Carnegie Institution, 1919. (Reprint. Bronx, N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1952.)

"The Factorgram." Kenneth P. Swallow. *The Mathematics Teacher*, Vol. 48, No. 1; January, 1955. Pages 13–17.

The First Six Million Prime Numbers. C. L. Baker and F. J. Gruenberger. Madison, Wis.: Microcard Foundation, 1959.

"A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes." M. L. Stein, S. M. Ulam, and M. B. Wells. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 71, No. 5; May, 1964. Pages 516–520.

"Peculiar Properties of Repunits." Samuel Yates. *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 2, No. 3; July, 1969. Pages 139–146.

10

On the Traversing of Geometrical Figures. J. C. Wilson. Oxford: Oxford University Press, 1905.

Economic Applications of the Theory of Graphs. Giuseppe Avondo-Bodino. New York: Gordon and Breach, 1962.

The Theory of Graphs and Its Applications. Claude Berge. New York: Barnes and Noble, 1962.

Flows in Networks. L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1962.

Graphs and Their Uses. Oystein Ore. New York: Random House, 1963.

Groups and Their Graphs. Israel Grossman and Wilhelm Magnus. New York: Random House, 1964.

Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications. Robert G. Busaker and Thomas L. Sarty. New York: McGraw-Hill, 1965.

Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. Frank Harary, Robert Z. Norman, and Dorwin Cartwright. New York: John Wiley and Sons, 1965.

Connectivity in Graphs. W.. H. Tutte. Toronto: University of Toronto Press, 1967.

A Seminar on Graph Theory. Edited by Frank Harary. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1967.

11

"The Problem of the Pennies." F. J. Dyson. *The Mathematical Gazette*, Vol. 30, No. 291; October, 1946. Pages 231–234.

"The Counterfeit Coin Problem." C. A. B. Smith. *The Mathematical Gazette*, Vol. 31, No. 293; February, 1947. Pages 31–39.

"On Various Versions of the Defective Coin Problem." Richard Bellman and Brian Gluss. *Information and Control*, Vol. 4, Nos. 2–3; September, 1961. Pages 118–131.

Puzzles and Paradoxes. T. H. O'Beirne. New York: Oxford University Press, 1965. Chapters 2 and 3.

13

A Treatise on the Cycloid. Richard Anthony Proctor. London: Longmans, Green and Co., 1878.

"Some Historical Notes on the Cycloid." E. A. Whitman. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 50, No. 5; May, 1943. Pages 309–315.

A Book of Curves. E. H. Lockwood. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

"Brachistochrone, Tautochrone, Cycloid – Apple of Discord." J. P. Phillips. *The Mathematics Teacher*, Vol. 60, No. 5; May, 1967. Pages 506–508.

14

Mathemagic. Royal Vale Heath. New York: Dover, 1953.

Mathematics, Magic and Mystery. Martin Gardner. New York: Dover, 1956.

Math Miracles. Wallace Lee. Durham, North Carolina: Privately printed, 1950. Revised edition, 1960.

Mathematical Magic. William Simon. New York: Charles Scribner's Sons, 1964.

15

Handy-Book of Literary Curiosities. William S. Walsh. Philadelphia: J. B. Lippincott Company, 1892.

Playing with Words. Joseph T. Shipley. New York: Prentice-Hall, 1960.

Oddities and Curiosities of Words and Literature. C. C. Bombaugh. New York: Dover, 1961.

Language on Vacation. Dmitri A. Borgmann. New York: Charles Scribner's Sons, 1965.

Games for Insomniacs. John G. Fuller. New York: Doubleday, 1966.

Beyond Language. Dmitri A. Borgmann. New York: Charles Scribner's Sons, 1967.

300 Best Word Puzzles. Henry Ernest Dudeney. 1925. (Reprint. New York: Charles Scribner's Sons, 1968.)

16

The Pythagorean Proposition. Elisha Scott Loomis. Privately printed, 1940. (Reprint. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.)

"Rational Right Triangles with Equal Areas." W. P. Whitlock, Jr. *Scripta Mathematica*, Vol. 9, No. 3; September, 1943. Pages 155–161.

"Rational Right Triangles with Equal Areas." W. P. Whitlock, Jr. *Scripta Mathematica*, Vol. 9, No. 4; December, 1942. Pages 265–268.

Pythagorean Triangles. Waclaw Sierpinski. New York: Academic Press, 1962.

"The Eternal Triangle." Albert H. Beiler. In his *Recreations in the Theory of Numbers*. New York: Dover Publications, 1964.

17

An Introduction to the Theory of Infinite Series. T. J. I'a. Bromwich. London: Macmillan and Co., Limited, 1942.

Summation of Infinitely Small Quantities. I. P. Natanson. Boston: D. C. Heath and Co., 1963.

Limits. Norman Miller. Waltham, Mass.: Blaisdell Publishing Co., 1964.

Limits and Continuity. William K. Smith. New York: Macmillan, 1964.

A Concept of Limits. Donald W. Hight. New York: Prentice-Hall, 1966.

Infinite Series. Earl D. Rainville. New York: Macmillan, 1967.

Modern Science and Zeno's Paradoxes. Adolf Grünbaum. Middletown, Conn.: Wesleyan University Press, 1967.

18

"Maestro Puzzles." J. E. Reeve and J. A. Tyrrell. *The Mathematical Gazette*, Vol. 45, No. 352; May, 1961. Pages 97–99.

"Pentominoes and Hexiamonds." T. H. O'Beirne. *New Scientist*, Vol. 12, No. 259; November, 1961. Pages 316–317.

"Some Hexiamond Solutions: and an Introduction to a Set of 25 Remarkable Points." T. H. O'Beirne. *New Scientist*, Vol. 12, No. 260; November, 1961. Pages 379–380.

"Thirty-Six Triangles Make Six Hexiamonds Make One Triangle." T. H. O'Beirne. *New Scientist*, Vol. 12, No. 265; December, 1961. Pages 706–707.

Die 12 Verhext. Herbert Zimpfer, Baden: privately printed, 1967.

"Polyiamonds." Ir. P. J. Torbijn. *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 2, No. 4; October, 1969. Pages 216–227.

19

"The Tetrahedral Principle in Kite Structure." Alexander Graham Bell. *National Geographic*, Vol. 14, No. 6; June, 1903. Pages 219–251.

"Geometry of Paper Folding, II. Tetrahedral Models." C. W. Trigg, *School Science and Mathematics*, Vol. 54, December, 1954. Pages 683–689.

"Alexander Graham Bell Museum: Tribute to Genius." Jean Lesage. *National Geographic*, Vol. 60, No. 2; August, 1956. Pages 227–256.

Regular Polytopes. H. S. M. Coxeter. New York: The Macmillan Company, 1963.

21

"Areas of Simple Polygons." David A. Kelley. *The Pentagon*, Vol. 20, No. 1; Fall, 1960. Pages 3–11.

"Lattice Paths with Diagonal Steps." L. Moster and W. Zayachkowski. *Scripta Mathematica*, Vol. 26, No. 3; Autumn, 1963. Pages 223–229.

"Lattice Points and Polygonal Area." Ivan Niven and H. S. Zuckerman. *The American Mathematical Montbly*, Vol. 74, No. 10; December, 1967. Pages 1195–1200.

Mathematical Snapshots. Hugo Steinhaus. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1968.

22

"The Infinite Regress." John Passmore. In his *Philosophical Reasoning*. New York: Charles Scribner's Sons, 1961.

"Snowflake Curves." Bruce W. King. *The Mathematics Teacher*, Vol. 57, No. 4; April, 1964. Pages 219–222.

"Avatars of the Tortoise." Jorge Luis Borges. In his *Labyrinths: Selected Stories and Other Writings*. New York: New Directions, 1964.

"Partial Magic in the Quixote." Jorge Luis Borges. In his *Labyrinths: Selected Stories and Other Writings*. New York: New Directions, 1964.

"A Generalization of the Von Koch Curve." Joel E. Schneider. *Mathematics Magazine*, Vol. 38, No. 3; May, 1965. Pages 144–147.

"Infinity in Mathematics and Logic." James Thomson. In *The Encyclopedia of Philosophy*. Vol. 4. New York: Crowell Collier, 1967. Pages 183–190.

"Infinity in Theology and Metaphysics." H. P. Owen. In *The Encyclopedia of Philosophy*. Vol. 4. New York: Crowell Collier, 1967. Pages 190–193.

23

"Philately and Mathematics." Carl B. Boyer. *Scripta Mathematica*, Vol. 15, No. 2; June, 1949. Pages 105–114.

"Mathematics and Philately." H. D. Larsen. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 60, No. 2; February, 1953. Pages 141–143.

"Mathematics on Stamps." H. D. Larsen. *The Mathematics Teacher*, Vol. 48, 1955. Pages 477–480. Vol. 49, 1956. Pages 395–396.

"The House Problem." Ralph Finkelstein. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 72, No. 10; December, 1965. Pages 1082–1088.

"Mathematicians and Mathematics on Postage Stamps." William Schaaf. *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 1, No. 4; October, 1968. Pages 195–216. (For errata, see Vol. 2, No. 9; July, 1969. Page 192.)

24

"Pursuit Curves and Mathematical Art." I. J. Good. *The Mathematical Gazette*, Vol. 43, No. 343; February, 1959. Pages 34–35.

"Two Hexagonal Designs." Prakash Chandra Sharma. *The Mathematical Gazette*, Vol. 45, No. 351; February, 1961. Pages 26–27.

"Op Art: Pictures That Attack the Eye." *Time*, Vol. 84, No. 17; October 23, 1964. Pages 78–84.

"Op Art." *Life*, Vol. 57, No. 24; December 11, 1964. Pages 132–140.

"Art That Pulses, Quivers and Fascinates." John Canaday. *The New York Times Magazine*, Vol. 114, No. 39, 110; February 21, 1965. Pages 12–59.

"Optical Art." Gerald Oster. *Applied Optics*, Vol. 4, No. 11; November, 1965. Pages 1359–1369.

Optical Illusions and the Visual Arts. Ronald G. Carraher and Jacqueline B. Thurston. New York: Reinhold, 1966.

Cybernetic Serendipity: The Computer and the Arts. Edited by Jasia Reichardt. London: *Studio International*, 1968. (Special issue.)

25

Lincos: Design of a Language for Cosmic Intercourse. Hand Freudenthal. New York: Humanities (North-Holland), 1960.

"Extraterrestrial linguistics." Soloman W. Golomb. *Astronautics*, Vol. 6, No. 5; May, 1961. Pages 46–47.

Interstellar Communication. A. G. W. Cameron, Ed. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1963.

We Are Not Alone. Walter Sullivan. McGraw-Hill Book Company, 1964.

Intelligent Life in the Universe. I. S. Shklovskii and Carl Sagan. San Francisco: Holden-Day, 1966.

"Is Anyone There?" Isaac Asimov. *Is Anyone There?* New York: Doubleday, 1967. Chapter 22.

VIEWEG

Unterhaltsame Mathematik

„Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als ein Dutzend mittelmäßiger gelehrter Abhandlungen".
Dieser Satz des englischen Mathematikers Littlewood kann als Motto für die hier angezeigten Mathematicals gelten, die alle der Unterhaltung und dem Vergnügen dienen, das eine so strenge Wissenschaft wie die Mathematik durchaus zu bieten vermag.

- Mathematische Rätsel und Probleme *von Martin Gardner*
- Mathematische Knobeleien von Martin Gardner
- Logik unterm Galgen von Martin Gardner
  Ein Mathematical in 20 Problemen.
- Trioker - mathematisch gespielt von M. Odier und Y. Roussel
  Logik und Fantasie mit Dreiecken.
- Mathematische Leckerbissen von C. Stanley Ogilvy
- Unterhaltsame Geometrie von C. Stanley Ogilvy
- Die Scheinwelt des Paradoxons von Patrick Hughes und George Brecht
  Eine kommentierte Anthologie in Wort und Bild.

Kennen Sie schon alle diese Bücher? Wenn Sie mehr wissen wollen, fragen Sie Ihren Buchhändler oder schreiben Sie direkt an den Verlag (Postfach 5829, 6200 Wiesbaden 1).

VIEWEG

Taschenrechner-Literatur

Harald Schumny

Taschenrechner Handbuch

Naturwissenschaften/Technik. Mit 16 Abb., 2. durchges. Aufl. 1978. 132 S. Kart.

Taschenrechner + Mikrocomputer Jahrbuch 1980

Anwendungsbereiche – Produktübersichten – Programme – Entwicklungstendenzen – Tabellen – Adressen. 1979. Ca. 250 S. mit zahlr. Abb. 18,5 X 24 cm. Kart.

Hans-Heinrich Gloistehn

Programmieren von Taschenrechnern

Band 1: Lehr- und Übungsbuch für den SR-56
Mit 26 Abb. und zahlr. Tab. 2., durchges. Aufl. 1978. IV. 140 S. Kart.

Band 2: Lehr- und Übungsbuch für den TI-57
Mit 25 Abb. und zahlr. Tab. 1978. IV. 112 S. Kart.

Band 3: Lehr- und Übungsbuch für den TI-58 und TI-59
Mit 25 Abb. und zahlr. Tab. 1978. IV. 150 S. Kart.

Anwendung programmierbarer Taschenrechner

Band 1: Angewandte Mathematik – Finanzmathematik – Informatik – Statistik für UPN-Rechner

von Helmut Alt

1979. VIII, 158 S. DIN C 5 (Anwendung programmierbarer Taschenrechner, Bd. 1) kart.

Udo Bromm

Programmierbare Taschenrechner in Schule und Ausbildung

Grundlagen und Anwendungen des Programmierens. 1979. VIII, 198 S. und über 50 Programme. Kart.

Ursula und Alexander Wynands

Elektronische Taschenrechner in der Schule

Ein Arbeits- und Aufgabenbuch für Lehrer und Schüler. 1978. VI, 125 S. Kart.